புகுமுக வகுப்புக் கணிதநூல்-III

(நுண்கணிதமும் கணவியலும்)
(Calculus and Set Theory)

ஆசிரியர்
தி. கோவிந்தராசன், எம்.ஏ., எல்.டி.,
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
சேலம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—276

புகுமுக வகுப்புக் கணிதநூல்-III

(நுண்கணிதமும் கணவியலும்)
(Calculus and Set Theory)

ஆசிரியர்
தி. கோவிந்தராசன், எம்.ஏ.,எல்.டி.,
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
சேலம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December, 1971

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 276

© Tamil Nadu Text Book Society

MATHEMATICS for P.U.C. (Book - III)

T. GOVINDARAJAN

Net Price Rs. 5-00
(No discount)

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises,
1, Smith Lane,
Madras-2.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்ோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரியமுறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்-III' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 276ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 311 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

முதற் பகுதி

நுண்கணிதம்

		பக்கம்
I A.	சார்புகள்	1
I B.	சார்புகளின் கோட்டுருவப் படங்கள் ...	9
I C.	எல்லைகள்	18
I D.	சார்புகளின் தொடர்ச்சித் தன்மை ...	28
II.	சில அடிப்படை எல்லைகள் ...	36
III.	வகை நுண்கெழு காணல்	45
IV A.	வகைக்கெழு—வடிவ கணிதப் பொருள் ...	84
IV B.	வளரும் சார்புகள், குறையும் சார்புகள் ...	99
V.	வகைக் கெழு—மாறிகளின் மாறுவீத அளவு	128
VI.	தொகை நுண் கணிதம்	146
VII.	தொகை காணல்—பயன்படுமிடங்கள் பரப்புகள்—கொள்ளளவுகள் ...	162
	விடைகள்	184

இரண்டாம் பகுதி

கணவியல்

I.	கணங்கள்—உப கணங்கள் ...	195
II.	கணங்களை ஒட்டிய செயல்கள் ...	206
III.	நிரப்பிச் செயல், கண வேறுபாடு ...	220
IV.	சார்புகளும் அமைப்புகளும் ...	229
V.	வரைபடங்கள்	237
VI.	பின்னிணைப்பு	268
	விடைகள்	270
	நுண் கணிதம்—கலைச்சொல்லகராதி ...	274
	கணவியல்—கலைச்சொல்லகராதி ...	286

முதற்பகுதி

நுண் கணிதம்

(Calculus)

IA. சார்புகள்

(Functions)

1.0 கணிதத்தில் நாம் மாறிலிகள் (constants) என சில இராசிகளையும், மாறிகள் (variables) என சில இராசிகளையும் பயன்படுத்துகிறோம்.

1.1 மாறிலி : சாதாரணமாக 1, 2,......... $1\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$,......... இவை யாவும் மாறிலிகள்.

ஆனால் இயற்கணிதத்தில் இயற்கணிதக் குறியீடுகள் கொடுக்கப்பட்டு, a, b, c...... எனப் பல மாறிலிகள், பயன்படுத்தப் படுவதை நாம் அறிவோம். குறிப்பிட்ட ஒரு கணக்கில், அல்லது குறிப்பிட்ட ஒரு ஆய்வில், மாறிலி எப்போதும் ஒரு மாறுத குறிப்பிட்ட மதிப்பையேற்று நிற்கும். அக் குறிப்பிட்ட மாறு மதிப்பு அக் கணக்கைப் பொருத்த மட்டுமே அல்லது அந்த ஆய்வைப் பொருத்த மட்டுமே ஒரே ஒரு மதிப்பைப் பெற்று நிற்கும்.

1·11 மாறிலிகள் இரு வகைப்படும் :

(1) யாதாமொரு மாறிலி அல்லது ஏதாவது நாம் விரும்பி ஏற்கும் மாறிலி (arbitrary constant).

(2) திட்டமான மாறிலி :

1, 2, 3,.......$-\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$...... போன்றவற்றை திட்டமான மாறிலிகள் (fixed constants) எனக் கூறலாம்.

1.12 மாறி : கணிதத்தில் மெய்யெண் மாறி எனில் (Real variable) அம்மாறி ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் அல்லது ஒரு

குறிப்பிட்ட ஆய்வில் எண்ணற்ற மெய்யெண் மதிப்புக்களை அல்லது பல மெய்யெண் மதிப்புக்களை ஏற்கக் கூடும் எனப் பொருள் படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, x என்னும் மாறி $x=1$க்கும், $x=2$ க்கும் இடைப்பட்ட எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்களையும் ஏற்கக் கூடும் எனக் கொண்டால், x என்ற மாறி ஏற்கக்கூடிய மதிப்புக் கள் கணக்கிலடங்கா ; அவற்றின் எண்ணிக்கையை 1, 2, 3, ... என எண்ணி முடியாது.

$x=1$ முதல் $x=20$ உட்பட x எல்லா முழு எண் மதிப்புக் களையும் ஏற்கக்கூடும் எனக் கூறின், x என்பது 20 மதிப்புக்களை மட்டுமே ஏற்கக்கூடிய மாறியாகும்.

1.121 மாறிகள் :

சார்பில் மாறி (independent variable), **சார்புடை மாறி** (dependent variable) :

மாறிகளில் இரு வகை மாறிகளுண்டு : (1) சார்பில் மாறி ; (2) சார்புடை மாறி.

(1) சார்பில் மாறி : ஒரு மாறிக்கு நாம் எந்த மதிப்பு வேண்டுமானுலும் கொடுக்கலாம் எனக் கூறினுல், அல்லது ஒரு மாறி எந்த மதிப்பை வேண்டுமானுலும் ஏற்கலாமெனக் கூறினுல், அம் மாறி ஒரு சார்பில் மாறி (ஒரு சார்பும் அற்றது) எனப்படும்.

(2) சார்புடை மாறி : ஒரு குறிப்பிட்ட மாறியின் மதிப்பு, மற்றும் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் மதிப் பைச் சார்ந்தது (அவற்றேடு தொடர்பு உடையது) எனில், முதற்கூறிய மாறி, சார்புடை மாறி எனப்படும்.

1.13 எடுத்துக்காட்டுகள் :

$y=3x^3-4x+a$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண் டால், xக்குரிய ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் y இன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$x=1$; $y=a-1$

$x=2$, $y=a+16$

$x=-\frac{1}{2}$, $y=a+1\frac{5}{8}$ என்றவாறு.

இங்கு a என்பது ஒரு பொது மாறிலி (general constant) எனப்படும். ஆனால் $a=1$ எனக் கொண்டால்,

$y=3x^3-4x+1$;

$a=-2$ எனக் கொண்டால்,

$y=3x^3-4x-2$ எனப் பெறலாம்.

இங்கு a என்பதை யாதாமொரு மாறிலியெனக் கொள்ளலாம் அல்லது ஒரு பொது மாறிலி எனக் கொள்ளலாம்.

$a=1$ என ஏற்றுக் கொண்ட பிறகு, a ஒரு திட்டமான மாறிலியாகிறது.

1.2 சார்புகள் (functions) : ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் x அலகுகளாயின், அதன் சுற்றளவு $2\pi x$; அதன் பரப்பு πx^2. y ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவைக் குறிக்குமாயின் $y=2\pi x$ என்று x என்ற ஆரத்திற்கும் y என்ற சுற்றளவுக்கும் ஒரு தொடர்பிருக்கிறது. அவ்வாறே y ஒரு வட்டத்தின் பரப்பைக் குறிக்குமாயின் $y=\pi x^2$ என்று x என்ற ஆரத்தையும் y என்ற பரப்பையும் இணைக்கும் ஒரு தொடர்பிருக்கிறது.

இங்கு $y=f(x)=2\pi x$ எனவும் (A)

$y=F(x)=\pi x^2$ எனவும் (B) இத் தொடர்புகளை எழுதலாம்.

அதாவது y என்பது x இன் ஒரு சார்பு; x இன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால், அதற்குரிய y இன் மதிப்பைக் கணிக்கலாம். x இல் ஏற்படும் மாறுதல்களையொட்டி y இலும் மாறுதல்கள் ஏற்படும். இது (A), (B) என்ற இரு சார்புகளுக்கும் பொருந்தும். இந்த விளக்கத்தின் அடிப்படையில் ஒரு சார்பினை வரையறுக்கலாம்.

1.21 வரையறை : x இன் மதிப்பு கொடுக்கப்படின், அதற்குரிய y இன் மதிப்பைக் காண முடியுமாயின், y என்பது x இன் ஒரு சார்பு எனப்படும்.

$y=2\pi x$ என்பது ஒரு சார்பு ;

$y=\pi x^2$ என்பது மற்றோர் சார்பு.

சார்பு என் மிக விரிவான முறையில் பார்ப்போமானால், அச்சார்பு ஓர் இயற்கணிதத் தொடர்பாக மட்டுமே இருக்க

வேண்டுமென்ற தேவை இல்லை. ஒரு கோண கணித சார்பாகவும் இருக்கலாம்; அல்லது மடக்கையொட்டிய (logarithmic) சார்பாகவும் இருக்கலாம்.

பொதுவாக y என்பது x இன் ஒரு சார்பெனில், ஒரு x மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால் அதற்குரிய y இன் மதிப்பைக் காண முடிந்தால் மட்டுமே போதுமானது.

1.211 எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $y=x$ இன் முழு எண் பகுதி$=I(x)$ என்பதும் ஒரு சார்பாகும்.

(2) $x>0$ ஆனால் $y=x^2$; $x\leq 0$ க்கு, yக்குரிய மதிப்பேதுமில்லை. இதுவும் ஒரு சார்பாகும்.

(3) x கூட்டு முழு எண்ணுயின், $y=x+\sqrt{x}$; x கூட்டு முழு எண்ணில்லையாயின், y இன் மதிப்பு பூச்சியம். இதுவும் ஒரு சார்பாகும். (x இன் மற்ற கூட்டு மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கு y இன் மதிப்பு நமக்குத் தெரியாது).

மேற்கூறிய சார்புகள் சற்று விசித்திரமான முறையிலே வரையறுக்கப்பட்டிருந்தாலும், x கொடுக்கப்படின் அதற்குரிய ஒரு y மதிப்புப் பெறக்கூடும் என்பது தெரிகிறது. $y=f(x)$ எனக் கூற, இது மட்டுமிருந்தாலே போதுமானது.

இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டில் x பூச்சியமானுலோ, அல்லது குறை மதிப்பை ஏற்ருலோ, y இன் மதிப்பு ஏதுமில்லை. இவ்வகையான சார்புகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் அல்லது குறிப்பிட்ட மதிப்புக்களுக்கு மட்டுமே வரையறுக்கப்பட்டிருக்கின்றனவெனக் கூறப்படும்.

$y=\sqrt{x}$ என்பது x இன் கூட்டு மதிப்புக்களுக்கு மட்டுமே வரையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது. ($\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$ போன்றவை கற்பனையெண்கள்—மெய்யெண்கள் அல்ல)

சார்புகளைப் பற்றி ஒரு தனி நூலே வரையக் கூடிய அளவு செய்திகள் உள்ளன. இங்கு மிகச் சிறிய அளவிலேயே, சார்புகளைப் பற்றி, புகுமுக வகுப்பில் தேவைப்படக் கூடிய அளவிற்கு, விளக்கங்கள் கூறப்பட்டுள்ளன.

இதுவரை கூறப்பட்டவை ஒரே ஒரு மாறியை ஒட்டிய சார்புகளாகும். இவை ஒரு சார்பில் மாறிக்கும் ஒரு சார்புடை மாறிக்கும் உள்ள தொடர்பு.

1.22 இவ்வாறே இரண்டு, மூன்று, பல சார்பில் மாறிகளையொட்டிய சார்புடை மாறிகள் உள்ளன.

x, y, z என்பவை ஒரு செவ்வகக் கட்டையின் நீளம், அகலம், உயரமாயின், அதன் கொள்ளளவு $V = xyz$ என்ற சார்பைக் காண்க. இங்கு x, y, z என்பவை சார்பில் மாறிகள். V என்பது அச் சார்பில் மாறிகள் யாவற்றினோடும் தொடர்பு கொண்ட ஒரு சார்புடை மாறி. x மாறலாம், y மாறலாம், z மாறலாம், ஏதேனும் இரண்டு மாறலாம், அல்லது மூன்றுமே மாறலாம். அந்தந்த மாற்றங்களுக்கேற்ப V இன் மதிப்பு மாறும்.

V என்பது x, y, z என்ற மூன்று சார்பில் மாறிகளைச் சார்ந்த ஒரு சார்புடை மாறி. அதுபோல, $z = ax^2 + 2hxy + by^2$ எனக் கொண்டால், z என்பது x, y என்ற இரு சார்பில் மாறிகளைச் சார்ந்த ஒரு சார்புடை மாறி.

$V = F(x, y, z)$ எனவும் $z = f(x, y)$ எனவும் இவற்றினைக் குறிக்கலாம்.

1.3 வெளிப் படைச் சார்புகளும் (Explicit functions) மறைமுகச் சார்புகளும் (Implicit functions)

y என்பது x இன் ஒரு சார்பாயின், y என்பது நேர்முகமாக x ஐச் சார்ந்த ஒரு தொடர்பாகக் கொடுக்கப்படலாம்.

எ. கா.: (1) $y = x^2 - x + 3$

(2) $y = \sin x + \cos 2x$

(3) $y = \log x - \log(x+a) + x^2 - \cos 3x.$

(4) $y = I(x)$, அதாவது x இன் முழு எண் பகுதி.

(5) $x > 0$ ஆனால் $y = x^2$
$-1 < x \leq 0$ ஆனால் $y = 1 - x^2$

இந்த விதமான சார்புகள் வெளிப்படைச் சார்புகள் எனப்படும்.

இவ்வாருக இல்லாமல், x, y இரண்டும் ஒரு சமன்பாட்டு வாயிலாகக் கொடுக்கப்படலாம்.

$$(1) \quad x^2+y^2=16$$
$$(2) \quad x^2+\sin x=\cos y+xy$$

இங்கு $x^2+y^2=16$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து $y=\pm\sqrt{16-x^2}$ என்ற நேர்முகச் சார்பைப் பெற முடிகிறது. ஆனுல் ஒரு குறிப்பிட்ட x க்கு இரண்டு y மதிப்புக்கள் பெறப்படுகின்றன; மேலும் $x>4$ ஆனுலும் $x<-4$ ஆனுலும் y இன் மதிப்பு ஒரு கற்பனை எண்ணுகப் பெறப்படுகிறது. $x=4$ ஆனுல் $y=0$ ஆகிறது. எனவே $-4\leq x\leq 4$ என்ற இடைவெளியில் மட்டுமே x ஒரு மதிப்பேற்பின் அதற்குரிய தனி மதிப்பில் சமமான, ஆனுல் கூட்டு, குறைக் குறிகளுடைய இரு மதிப்புக்கள் பெறப்படுகின்றன. எனவே y என்பது ஓர், ‘இரு மதிப்பு’ உடைய (double valued) சார்பாகிறது.

$x^2+\sin x=\cos y+xy$ என்ற சார்பின் உதவி கொண்டு $y=$ ஒரு நேர்முகமான x இன் சார்பு எனக் காண இயலாது. இவ் விதமான சார்புகள் மறைமுகமான சார்புகள் அல்லது உட்படு சார்புகள் எனப்படும். அதிலும் ஒரு வகையான சார்புகளில் y ஐ x இன் ஒரு நேர்முகச் சார்பாகக் காண இயல்கிறது; மற்றொன்றில் அது முடியாது போகிறது. எனினும் இவ்விரு முறைகளிலும் அமையும் சார்புகள் யாவும் மறைமுகச் சார்புகள் எனவே கூறப்படுகின்றன.

1.31 சார்பின் சார்புகள் (function of a function):

$z=y^2+y+1$; $y=\sqrt{\sin x+\cos x}$ என்ற சார்புகளைப் பார்த்தால், y என்பது x இன் சார்பாகவும், பின்பு z என்பது y இன் ஒரு சார்பாகவும் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். ஆனுலும் x க்குரிய மதிப்புக்களுக்கு y மூலமாக, z என்பது x இன் ஒரு சார்பாக அமைகிறது. அதை

$$z=(\sqrt{\sin x+\cos x})^2+(\sqrt{\sin x+\cos x})+1$$

எனவும் எழுதலாம்.

$z=F(y)$; $y=f(x)$ என்ற முறையில் ஒரு சார்பின் சார்பு வரையறுக்கப்படலாம். இன்னும் இம் முறையை விரிவாக்கிக் கொண்டு போனுல்,

$z=F(y)$; $y=f(x)$; $x=\ (t)$ என zஐ முதலில் y மூலமாகவும், பின்னர் x மூலமாகவும் முடிவாக t இன் சார்பாகவும் ஏற்கலாம்.

(எ. கா. :) $z=y^2$; $y=\sin x$; $x=3t$ எனக் கொண்டால்

$$z = \sin^2 x$$
$$= \sin^2 3t$$

என்ற வெளிப்படைச் சார்பு பெறப்படுகிறது. மேலும்,

$u = F(z)$, $z = F_1(y)$; $y=F_2(x)$; $x=F_3(t)$; $t=F_4(w)$ என விரிவாக்கிக் கொண்டே சென்று சார்பின் சார்புகளைப் பொதுமைப் படுத்திப் பார்க்கலாம்.

1.32 இரட்டைப் படைச் சார்புகள் (even functions) :

$f(x) = f(-x)$ ஆனால் $f(x)$ என்பது ஓர் இரட்டைப் படைச் சார்பெனப்படும்.

(எ. கா.) $f(x) = x^4+3x^2+1$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \sec x$ என்பவை சில இரட்டைப்படைச் சார்புகளாகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் x இன் படிகள் யாவும் இரட்டைப் படையிலிருக்குமாயின் $f(x)$ உம் $f(-x)$ உம் சமமாயிருக்குமென்பது காண்க.

1.33 ஒற்றைப்படைச்சார்புகள் (odd functions) :

$f(-x) = -f(x)$ ஆனால் $f(x)$ என்பது ஓர் ஒற்றைப் படைச் சார்பெனப்படும்.

(எ. கா): $f(x)=x^3-3x$; $f(x) = \sin x$; $f(x) = \tan x$ என்பவை சில ஒற்றைப் படைச் சார்புகளாகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் x இன் படிகள் யாவும் ஒற்றைப் படையாயிருக்குமாயின் $f(-x) = -f(x)$ என்பது காண்க.

1.34 காலவட்டச் சார்புகள் (periodic functions) :

$f(x) = f(x+a) = f(x+2a) = \dots\dots\dots$ ...ஆகவிருப்பின் $f(x)$ என்பது ஒரு காலவட்டச் சார்பாகும் ; ஏனெனில் x இன் மதிப்பு, படிப்படியாக a, a, a, a..........என உயருங் காலை மறுபடியும் மறுபடியும் $f(x)$ இன் மதிப்புக்கே திரும்புகிறது.

(எ. கா.) $f(x)=\sin x=\sin(2\pi+x) = \sin(4\pi+x)=$ .... $= \sin(2r\pi+x)$. இங்கு $\sin x$ என்பது ஒரு கால வட்டச் சார்பு ; கால வட்டம் (period) 2π.

$f(x) = \tan x = \tan(\pi + x) = \tan(2\pi + x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots = \tan(r\pi + x)$. இங்கு $\tan x$ இன் காலவட்டம் π.

1.35 நேர்மாறு சார்பு (inverse function) :

y என்பது x இன் சார்பானால் x ஐ y இன் சார்பாகக் கூற முடியும். அப்போது பின் கூறப்பட்ட சார்பு முதற் கூறப்பட்டதின் நேர்மாறு சார்பு எனப்படும்.

(எ. கா) : $y = \sin x$

$x = \sin^{-1} y$ என்று எழுதுவது மரபு. இது முதல் சார்பான $y = \sin x$ இன் நேர்மாறு சார்பு.

$y = x^3$

$x = y^{\frac{1}{3}}$ என்பது முதல் சார்பின் நேர்மாறு சார்பு. இதை மறுதலையாகவும் கூறலாம்.

$x = y^{\frac{1}{3}}$ என்ற முதற் சார்பின் நேர்மாறு சார்பு $y = x^3$.

பொதுவாக $y = f(x)$ என்றால்,

$x = f^{-1}(y)$ என எழுதுவது மரபு.

அவ்வாறே $x = F(y)$ என்றால்,

$y = F^{-1}(x)$ எனவும் எழுதலாம்.

ஆனால் இந்த நிலையில் நாம் $y = f(x)$ என்ற வகையிலமைந்த, x எனப்படும் ஒரு சார்பில் மாறியையொட்டிய y எனப்படும் சார்புடை மாறியைப் பற்றியே பெரிதும் தெரிந்து கொள்ளப் போகிறோம். நுண் கணிதத்தின் நோக்கம் ஒரு சார்பு எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதை ஆராய்வதேயாகும்.

IB சார்புகளின் கோட்டுருவப் படங்கள்

(Graphs of Functions)

1.4 இவ்வித சார்புகளின் சில பண்புகளை, நாம் கோட்டுருவப் படம் வரைந்து நேரடியாகக் காணலாம். இது சார்புகளைப்பற்றி அறியும் முதல் நிலைதான். "சார்புகளின் கொள்கை" (The Theory of functions) என்பது ஒரு பரந்துபட்ட அறிவியல் துறையாகும்; இது கணிதவியலின் அடிப்படை; மற்ற அறிவியல் துறைகளிலும் (பௌதீகம், வேதிநூல், உளநூல், பொருளாதாரம், விலங்கியல், போன்றவை) நுண்ணிய ஆராய்ச்சிகள் செய்ய சார்புகளைப்பற்றிய பண்புகள் பெரிதும் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. முதல் நிலையாக, சார்புகளும் கோட்டுருவப் படங்களும் என்ற தலைப்பில் சில உண்மைகளைப் பார்ப்போம். பின்வரும் சார்புகளையும் அவற்றிற்குரிய கோட்டுருவப் படங்களையும் கவனிப்போம்.

1.41 சார்புகளும் கோட்டுருவப் படங்களும்

(1) $y=x^2$ இதன் கோட்டுருவப் படங் காண்க. (படம் 1.41)

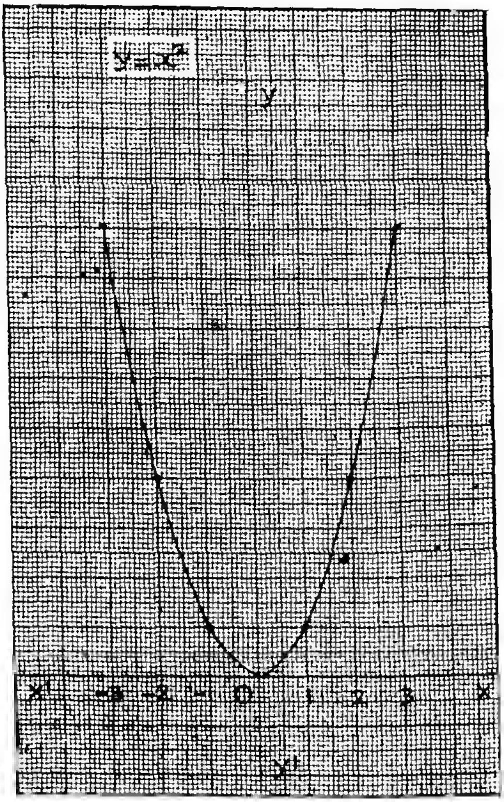
x	0	1	2	3	-2	-3
y	0	1	4	9	4	9

இந்தக் கோட்டுருவப் படத்தைப் பார்த்தால், பின் கூறப்படும் சில பண்புகள் தெளிவாகப் புலப்படும்.

(1) வளைவரை ஆய ஆதியின் வழியாகச் செல்கிறது.

(2) y அச்சுக்குச் சமச் சீருடையதாய் இருக்கிறது.

(3) x அச்சுக்குக் கீழே வளைவரை இல்லை.



படம் 1·41

(4) x இன் மதிப்பு O முதல் வளர்ந்து கொண்டே போகும் போது y உம் வேகமாக வளர்ந்துகொண்டே போகிறது.

x இன் மதிப்பு O முதல் குறைந்து கொண்டே போகும் போதும், y மதிப்பு வேகமாக வளர்ந்துகொண்டே போகிறது.

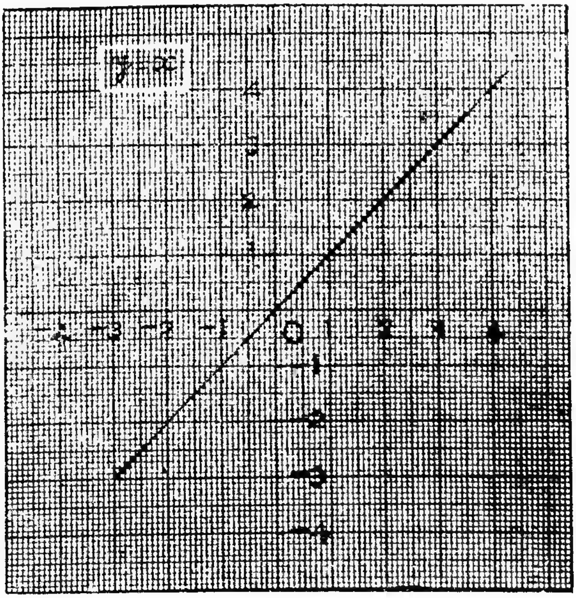
(5) வளைவரை x அச்சை (O, O) என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது.

$y=x^2$ என்று நாம் கோட்டுருவம் வரைந்த சார்பு ஒரு இரட்டைப்படைச் சார்பு ; ஏனெனில் 1 32இல் வகுத்த வரை

யறைப்படி $f(x) = f(-x)$, அதாவது $x^2 = (-x^2)$ என்பது காண்க.

$x=a$க்கும் ,$x=-a$க்கும் yஇன் மதிப்பு ஒரே சமமான மதிப்பு a^2 ஆதலால், இச்சார்பின் கோட்டுருவப்படம் y அச்சை யொட்டி சமச் சீர்பெற்றதாக விருக்கும் (Symmetric about the y axis) இவ்வாறே y என்பது x இன் மற்றெந்த இரட்டைப் படைச் சார்பாயினும் அதன் கோட்டுருவப் படம், y அச்சை யொட்டி சமச்சீர் பெற்றதாக விருக்கும். அதே போல் $x=y^2$ என்ற சார்பின் கோட்டுருவப் படம் x அச்சையொட்டி சமச் சீருடையதாக விருக்கும் என்பதைப் படம் வரைந்து காண்க. உரிய மதிப்புக்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காண்க.

x	0	1	1	4	−4	9	−9
y	0	1	−1	2	−2	3	−3



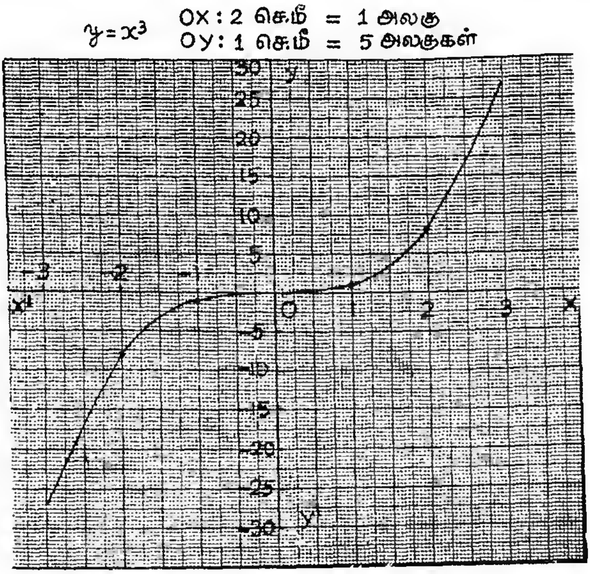
படம் 1·42

1.42 $y=x$ என்பது ஆய ஆதியின் வழியாகச் செல்லும்

ஒரு நேர்கோடு என்பது நமக்குத் தெரியும். (இயல் முறை வடிவ கணிதம்). x இன் கூட்டு மதிப்புக்களுக்கு y இன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பாயிருக்கும்; x இன் குறை மதிப்புக்களுக்கு y இன் மதிப்பு குறை மதிப்பாயிருக்கும். எனவே ஆய ஆதி O க்கு வலதுபுறம் நேர்கோடு x அச்சுக்கு மேலேயும், O க்கு இடது புறம் நேர்கோடு x அச்சுக்குக் கீழேயும் இருப்பதைப் படம் 1.42 இல் காண்க.

1.43 அவ்வாறே $y=x^3$ என்ற சார்பிற்குப் படம் வரைந்து பார்ப்போம்.

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	1	−1	8	−8	27	−27



படம் 1·43

0 க்கு வலதுபுறம் வளைவரை x அச்சுக்கு மேலேயும், 0 க்கு இடதுபுறம் வளைவரை x அச்சுக்குக் கீழேயும் இருப்பதைக் காண்க. $y=x^3$ என்பது ஓர் ஒற்றைப் படைச் சார்பாதலின்,

அதன் வளைவரை எந்த அச்சுக்கும் சமச்சீர் பெற்றதாயிராது. $y=x^2$; $y=x^3$ என்ற சார்புகளின் வளைவரைகளைக் கண்டால், பொதுவான சில பண்புகளைப் பார்க்கலாம்.

1. வளைவரைகள் ஆய ஆதி வழியாகச் சென்று, (0,0) என்ற இடத்தில் x அச்சைக் கடக்கின்றன.

2. முதல் நாற்கூறில், $y=x^2$ன் வளைவரையும், $y=x^3$ன் வளைவரையும் வடிவொத்திருப்பதுபோலத் தோன்றினும், $y=x^3$ன் வளைவரை ஆய ஆதிக்கு அண்மையில் ($0\leq x\leq 1$ என்ற பகுதியில்) $y=x^2$ இன் வளைவரையை விடத் தட்டையாயும், $x>1$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு, மேடு அதிகமாகப் போவதையும் காண்க.

3. $y=x^2$க்கு உள்ள சமச்சீர் தன்மை $y=x^3$க்கு இருக்க முடியாதென்பதையும் காண்க.

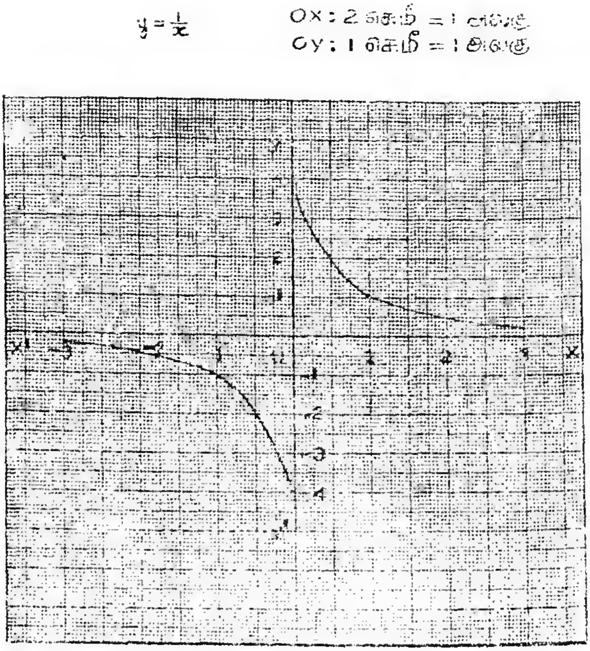
இவ்வாறே $y=x^4$, x^6, ... என்ற சார்புகளின் வளைவரைகளையும்,

$y=x^5$, x^7,.........என்ற சார்புகளின் வளைவரைகளையும் வரைந்து பார்த்தால் அவற்றின் வடிவங்களின் ஒற்றுமை வேற்றுமைகள் புலப்படும்.

1.44 $y=\frac{1}{x}$; $y=\frac{1}{x^2}$ என்ற இரு சார்புகளின் வளைவரைகளை வரைந்து அவற்றின் சில சிறப்புப் பண்புகளைப் பார்ப்போம்.

1.441 $y=\frac{1}{x}$; படம் கீழே காண்க. (1.441 படம்)

x	3	-3	2	-2	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	4
y	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	2	-2	3	-4	$\frac{1}{4}$



படம் 1.441

1.442 $y = -\frac{1}{x^2}$; படம், கீழே காண்க. (படம் 1.442).

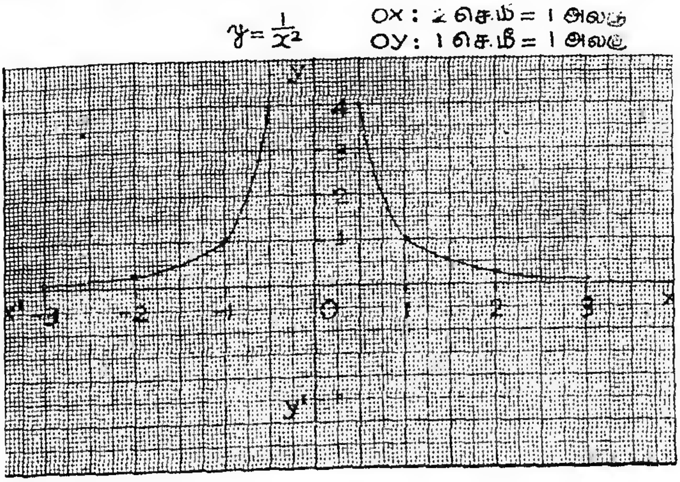
x	3	−3	2	−2	1	−1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	1	4	4	9	9

1.443 $y = \frac{1}{x}$ **என்ற படத்தின் பண்புகள்:** (படம் 1.441)

(1) $x>0$க்கு, வளைவரை x அச்சுக்கு மேலேயும் $x<0$ க்கு, வளைவரை x அச்சுக்குக் கீழேயும் இருப்பதைக் காண்க. இது ஓர் ஒற்றைப்படைச் சார்பாதலின் எந்த அச்சுக்கும் சமச்சீர் பெற்றிராது.

(2) ஆனால் ஆய ஆதியான (0, 0)ஐ சமச் சீர் மையம் என்று கூறலாம் (centre of symmetry).

(3) x இன் மதிப்பு கூட்டெண்ணாய், வளர்ந்து செல்லச் செல்ல, y இன் மதிப்பு கூட்டெண் மதிப்பாய் மிகமிகக்



படம் 1.442

குறைந்து கொண்டே செல்வதைக் காண்க. எனவே $x>0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் x இன் மதிப்பு எல்லையின்றி வளருமாயின், வளைவரை x அச்சுக்கு மேலேயிருந்துகொண்டே, x அச்சை நெருங்கிச் செல்கிறது. இந்த நிலையில் x அச்சு ஒரு கந்தழித் தொடுவரை (asymptote) எனப்படும்.

(4) அவ்வாறே x இன் மதிப்பு குறையெண்ணாய் குறைந்து செல்லச் செல்ல, வளைவரை x அச்சுக்குக் கீழே இருந்து கொண்டே x அச்சை நெருங்கிச் செல்கிறது. இந்த நிலையிலும் x அச்சு ஒரு கந்தழித் தொடுவரை எனப்படும்.

(5) வளைவரை இரு பகுதிகளாக உள்ளதையும் காண்க. ஒரு பகுதி முதல் நாற்கூறிலும், மற்றோர் பகுதி மூன்றும் நாற்கூறிலும் இருப்பதையும் காண்க.

(6) x இன் மதிப்பு $x>0$ ஆகி மிகமிகக் குறையுமாயின் y கூட்டெண்ணாய் மிக மிக வளர்ந்து, y அச்சை நெருங்கும்; வளைவரை x அச்சுக்கு மேலே y அச்சுக்கு வலது புறம் நெருங்குவது காண்க. y அச்சு ஒரு கந்தழித் தொடுவரையாய் அமைவது காண்க.

(7) அவ்வாறே x இன் மதிப்பு $x<0$ ஆகி, x இன் தனி மதிப்பு மிகமிகக் குறையுமாயின், வளைவரை x அச்சுக்குக் கீழே y அச்சுக்கு இடதுபுறமாக நெருங்குவது காண்க. y அச்சும் ஒரு கந்தழித் தொடுவரையாய் அமைவதைக் காண்க.

1.444 $y=\frac{1}{x^2}$ **என்ற படத்தின் பண்புகள்:** (படம் 1.442)

(1) இங்கு $\frac{1}{x^2}$ என்பது இரட்டைப்படைச் சார்பாதலால், $\left(\because \frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-x)^2}\right)$ y அச்சுக்குச் சமச்சீருடையதாய் இருக்கும்.

(2) x இன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்பிற்கும் $\frac{1}{x^2}$ இன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்புடையதாயிருக்கும். எனவே வளைவரை எப்போதும் x அச்சுக்கு மேலேயேயிருக்கும்.

(3) $x>0$ ஆகி, x இன் மதிப்பு வளர வளர $\frac{1}{x^2}$ இன் மதிப்பு மிக மிகக் குறைந்து கொண்டே போகும்.

(4) ஆய ஆதிக்கு இரு புறத்திலும் வளைவரை x அச்சை நெருங்கிக் கொண்டே செல்லும்; ஆனல் அதற்குக் கீழே யிறங்காது.

முன்னர் 1.443 (3)இல் கூறியபடி, x அச்சு இவ்வளை வரைக்கு ஒரு கந்தழித் தொடுவரை எனப்படும்.

(5) வளைவரை இரு பகுதிகளாக உள்ளதையும் காண்க. ஒரு பகுதி முதல் நாற்கூறிலும், மற்ருேர் பகுதி இரண்டாம் நாற்கூறிலும் இருப்பது காண்க.

1.443 இல் கூறியது போல, x இன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பேற்று எல்லையற்று வளர்ந்து செல்வதை, x என்பது கூட்டுக் கந்தழியை, '$+\infty$' நோக்கிச் செல்கிறது என்று உயர்கணிதத்தில் கூறுவது ஒரு மரபு. அதை $x\to+\infty$ அல்லது $x\to\infty$ என்று படிப்பதும் எழுதுவதும் குறியீட்டு மரபாகும். இதன் பொருள் யாதெனில் நாம் நினைத்துப் பார்க்கக்கூடிய எந்த மிகப் பெரிய கூட்டெண்ணையும் விட x இன் மதிப்பு மிகக் கூடும் என்பதே. இவ்வாறே,

x இன் மதிப்பு குறை மதிப்பேற்று எல்லையற்றுக் குறைந்து கொண்டே செல்வதை, x என்பது, குறைக் கந்தழியை '$-\infty$' நோக்கிச் செல்கிறது என்று உயர்கணிதத்தில் கூறுவது ஒரு மரபு. இதை $x \to -\infty$ என்று படிப்பதும் எழுதுவதும் குறியீட்டு மரபாகும்.

இதன் பொருள் யாதெனில் நாம் நினைத்து பார்க்கக் கூடிய எந்த மிகக் குறைவான (குறை மதிப்புப் பெற்றுக் குறைவான) எண்ணையும் விட x இன் மதிப்பு குறையக்கூடும் என்பதே.

எடுத்துக்காட்டாக, $x < -10^{100}$ ஐ விடவும் குறையலாம், இன்னும் -10^{1000}ஐ விடவும் குறையலாம் என்பது ஒரு விளக்கமாகக் கொள்க.

$x \to \infty$ என்பதை x கந்தழி எல்லையை அணுகுகிறது என்று படிக்கலாம். (x tends to infinity) ; அவ்வாறே $x \to -\infty$ ஐயும் படிக்கலாம்.

1C எல்லைகள்

(Limits)

1.5 எல்லைகள் (Limits) :

$y=x^2$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். x இன் மதிப்பு 2க்குக் குறைவு என்ற கட்டுப்பாட்டில் வளர்ந்து கொண்டே சென்று 2க்கு மிக அண்மையில் செல்கிறது எனக் கொள்வோம். அதாவது 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.99, 1.999, ...என்று வளர்ந்து கொண்டே 2 என்ற மதிப்பை நெருங்கு கிறது எனக் கொள்வோம். அவற்றிற்குரிய y இன் மதிப்புக் களைப் பார்ப்போம். அட்டவணை காண்க :

x	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	1·99	1·99
y	2·25	2·56	2·89	3·24	3·61	3·9801	3·996001

அவ்வாறே x இன் மதிப்பு 2க்கு மேற்பட்டது என்ற கட்டுப் பாட்டில் குறைந்து கொண்டே சென்று 2க்கு மிக அண்மையில் செல்கிறது எனக் கொள்வோம்.

அதாவது

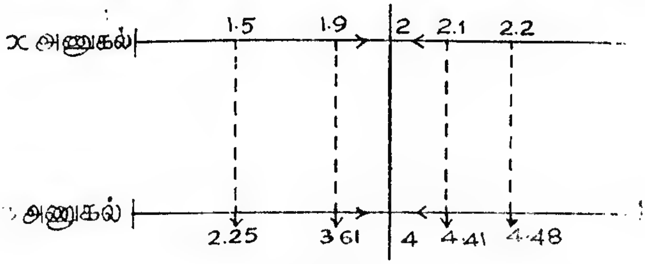
2·1, 2·01, 2·001, 2·0001,...... என்று குறைந்து கொண்டே 2 என்ற மதிப்பை நெருங்குகிறது எனக் கொள் வோம். அவற்றிற்குரிய y இன் மதிப்புக்களைப் பார்ப்போம்.

அட்டவணை காண்க.

x	2·1	2·01	2·001	2·0001	......
y	4·41	4·0401	4·004001	4·00040001	......

இந்த இரு அட்டவணைகளையும் சற்று கவனித்தால், x இன் மதிப்பு 2க்குக் குறைவு என்ற கட்டுப்பாட்டில் 2 என்ற மதிப்பை அணுகும்போது y இன் மதிப்பு 4க்குக் குறைவாய், 4 என்ற மதிப்பை அணுகுகிறது; அவ்வாறே x இன் மதிப்பு 2க்கு மிகுந்தது என்ற கட்டுப்பாட்டில் 2 என்ற மதிப்பை அணுகும்போது, y இன் மதிப்பு 4க்கு மேற்பட்டதாய், 4 என்ற மதிப்பை அணுகுகிறது.

பின்வரும் கோட்டின் மேல் அவ் 'வணுகுதலை'க் காண்க.



(படம்)

$x=2$ என்ற மதிப்பிற்கு $y=4$ என நமக்குத் தெரிகிறது.

எனவே, இவையெல்லாம் தொகுத்துக் கூறும்போது:

$y=x^2$ என்ற சார்பின் ஒரு தனிப் பண்பினைப் பார்க்கலாம். (இந்த எளிய பண்பை இவ்வளவு மிகைப்படுத்திக் கூறுவானேன் என்று கூட முதலில் தோன்றும். பின்னரே இதன் நுண்பொருள் விளங்க ஆரம்பிக்கும்).

(a) $x=2$க்கு y இன் மதிப்பு 4;

(b) x இன் மதிப்பு 2க்குக் குறைவாயிருந்து 2 என்ற மதிப்பை அணுகும்போது, y இன் மதிப்பு 4க்குக் குறைவாயிருந்து 4 என்ற மதிப்பை அணுகுகின்றது; (நான்கு ஆவதில்லை).

(c) x இன் மதிப்பு 2க்கு மிகுதியாயிருந்து 2 என்ற மதிப்பை அணுகும்போது y இன் மதிப்பு 4க்கு மிகுதியாக விருந்து 4 என்ற மதிப்பை அணுகுகிறது. (நான்கு ஆவதில்லை).

எனவே x இன் மதிப்பு 2க்குக் குறைபட்டோ, மிகுதிப் பட்டோ, 2 என்ற மதிப்பை அணுகும்போது, y இன் மதிப்பு 4 என்ற மதிப்பையே அணுகுகிறது. அந்த அணுகும் மதிப்பும், $x=2$ என்ற மதிப்பிற்குரிய $y=4$ என்ற சரியான மதிப்பும் ஒரே எண் 4 தான். இதை உயர் கணித மரபுப்படி, x என்ற மாறிலி 2 என்ற எல்லையை (Limit) அணுகும்போது y என்ற சார்பின் மதிப்பு 4 என்ற எல்லையை அணுகுகிறது எனக் கூறுவர்.

குறியீட்டின்படி

$x \to 2$ (x, 2 என்ற எல்லையை அணுகும்போது)

$y \to 4$ (y, 4 என்ற எல்லையை அணுகுகிறது.)

என்று எழுதுவதும் கூறுவதும் மரபு.

மாற்றாக

$\underset{x \to 2}{\text{எல்லை}}\; y=4$ எனவும் கூறலாம்.

அல்லது $\underset{x \to 2}{\text{எல்லை}}\; x^2=4$ எனவும் கூறலாம்.

மேலும் $x=2$ ஆனால் y அல்லது $x^2=4$ என்பதும் பொருந்தும்.

இதுவரை கூறப்பட்டதிலிருந்து, x இன் மதிப்பு 2க்கு மிக அண்மையில் இருக்குமாயின், அதாவது $x-2$ மிகச் சிறிதாகவோ அல்லது $2-x$ மிகச் சிறிதாகவோ இருக்குமானால் x^2-4 அல்லது $4-x^2$ இன் மதிப்பு மிகமிகச் சிறிதாகவிருக்கிறது. ஆகவே x இன் மதிப்பு 2 என்ற எல்லையை அணுகுகின்ற நிலையில் x^2 இன் மதிப்பு 4 என்ற எல்லையை அணுகுகிறது. $x-2$ அல்லது $2-x$ சிறிதாக இருக்கிறதென்பதை $|x-2|$ சிறிதாக இருக்கிறதெனக் குறியிடலாம்.

அதாவது $|x-2|$ என்ற மட்டு மதிப்பு சிறிது ; அதாவது x க்கும் 2க்கும் உள்ள வேறுபாடு மிகச் சிறிது. இந்தக் குறியீட்டோடு இப்போது எல்லை என்பதை வரையறுப்போம்.

1.51 வரையறை: x க்கும் 2க்கும் உள்ள வேறுபாடு மிகமிகச் சிறிதாக இருக்கும்போது x^2 க்கும் 4க்கும் உள்ள வேறுபாடுமிகச் சிறிதாக இருப்பதால், $\underset{x\to 2}{\text{எல்லை}}\ x^2\to 4$ எனக் கூறுகிறோம். இதையே பொதுப்படுத்தி $f(x)$ என்ற ஒரு சார்பைக் கொண்டு, எல்லையின் வரையறையை வகுப்போம்.

1.52 $|x-a|$ போதிய அளவு மிகமிகச் சிறிதாக ஆக $|f(x)-l|$ இன் மதிப்பை நாம் விரும்புமளவு மிகமிகச் சிறிதாக்க இயலுமானால், x இன் மதிப்பு a என்ற மதிப்பை அணுகும் போது, $f(x)$ இன் மதிப்பு l என்ற மதிப்பை அணுகுகிறது.

[The limit of a function $f(x)$ as $x\to a$ is said to be l, if $|f(x)-l|$ can be made as small as we please by taking $|x-a|$ sufficiently small].

இதை எழுதும் மரபு:

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\ f(x)\to l$$

அல்லது $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\ f(x)=l$

1.521 இப்போது, இந்த வரையறையின் அடிப்படையில் $y=x^2$ என்ற சார்பானது $x\to 2$ ஆகும்போது எந்த எல்லையை நெருங்குகிறது எனப்பார்ப்போம். $x=2+h$ எனக் கொண்டால், hஐ மிகச் சிறிதாகக்கொண்டால் $|x-2|$ மிகச் சிறிதாக விருக்கும். h க்குக் கூட்டுக் குறியோ அல்லது குறைக் குறியோ கொள்வோமானல்

$$|x-2|=|h|$$

அப்போது,

$$\begin{aligned}|x^2-4| &= |(2+h)^2-4|\\ &= |4+2h+h^2-4|\\ &= |2h+h^2|\end{aligned}$$

h மிகச் சிறிதானல், h^2 மிகச் சிறிதாகும். எனவே நாம் விரும்புமளவுக்கு $|2h+h^2|$ இன் மதிப்பு சிறிதாக இருக்க வேண்டுமானல், அதற்குத் தகுந்தமாதிரி நாம் h இன் மதிப்பைச் சிறிதாக்கி $|x^2-4|$ இன் மதிப்பைச் சிறிதாக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $|x^2-4|$ இன் மதிப்பு ·001 க்குக் குறைவாக வேண்டுமெனக் கொள்வோம். அதாவது $|2h+h^2|$ $< \frac{1}{1000}$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

$$|h| = \frac{1}{5000} = \cdot 0002 \text{ எனக் கொண்டால்}$$

$$|2h+h^2| = .0004 + \cdot 00000004\cdot$$
$$= \cdot 00040004 < .001$$

இன்னும் விரிவாகவும் விளக்கமாகவும், எல்லைகளைப்பற்றி நீங்கள் உயர் கணிதத்தில் படிப்பீர்கள். இந்த நிலையில் இந்த அளவு 'எல்லைகளைப்பற்றி ஒருவாறு தெரிந்துகொண்டால் போதும்.

1·53 மேலும் ஒரு சிறப்பான முறையில் அமையும் ஒரு விதமான எல்லையைப் பார்ப்போம்.

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ என்ற சார்பினை எடுத்துக்கொள்க. இங்கு $x=2$ என ஈடு செய்தால் $f(2) = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ எனக் கிடைக்கிறது. கணிதத்தில் $\frac{0}{0}$ என்பதற்கு ஒரு மதிப்புமில்லை; இது ஒரு தேராக் கணியம் (an indeterminate quantity) எனப் பெயரிடப் படும். ஆனால் இச் சார்பில் x இன் மதிப்பு 2 என்ற எல்லையை அணுகும்போது இச்சார்பின் மதிப்பு ஏதாவது திட்டமான எல்லையை நாடுகிறதா அல்லது அணுகுகிறதா எனப் பார்ப்போம்.

பின்வரும் அட்டவணையைக் காண்க.

x	1·9	1·99	1·995	......	2·1	2·05	2·0001	......
$y = \frac{x^2-4}{x-2}$	3·9	3·99	3·995	......	4·1	4·05	4·0001	......

இந்த அட்டவணையிலிருந்து x என்ற மாறி, 2 என்ற மதிப்பை எப்பக்கமாக அணுகினாலும், $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ இன் மதிப்பு 4 என்ற எல்லையை அணுகுகிறது எனத் தெரிகிறது. இன்னும் இதைப் பொதுப்படையாகவே ஆராய்வோம்.

$x=2+h$ (h மிகச் சிறியது, கூட்டு அல்லது குறை மதிப்புடையது) எனக்கொண்டால், $h\to 0$ ஆகும்போது $x\to 2$ ஆகிறது.

$$\therefore \quad \frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(2+h)^2-4}{(2+h)-2}$$

$$=\frac{4h+h^2}{h}$$

$$=4+h$$

எனவே h என்பது பூச்சியம் எல்லையை நாடும்போது, அதாவது x இன் மதிப்பு 2 எல்லையை நாடும்போது,

$\frac{x^2-4}{x-2}$ இன் மதிப்பு 4 என்ற எல்லையை நாடுகிறது.

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=4$$

ஆனால் $x=2$ என்னும்போது $\frac{x^2-4}{x-2}$ இன் மதிப்பு $\frac{0}{0}$ அல்லது ஒரு தேராக் கணியம் என்பதைக் கட்டாயம் கவனத்தில் வைக்க வேண்டும்.

குறிப்பு : $\text{எல்லை}_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$க்கும் $\text{எல்லை}_{x\to 2} x^2$க்கும் உள்ள முக்கிய வேறு பாட்டைக் காண்க.

$\text{எல்லை}_{x-2}\, x^2$ இன் மதிப்பும் $x=2$ க்குரிய x^2 இன் மதிப்பும் ஒன்றே—அதாவது 4.

ஆனால் $\text{எல்லை}_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$; இருப்பினும் $x=2$க்குரிய $\frac{x^2-4}{x-2}$ இன் மதிப்பு ஒரு தேராக்கணியம். இந்த வேறுபாடு உயர் கணிதத்தில் முக்கியமானதாகும்.

1.531 (எ. கா.);

(1) $\text{எல்லை}_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ என்ன ?

$x=3$ ஆனால் $\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}=$ தேராக்கணியம்.

$x \to 3$ என்னும்போது எல்லை என்னவெனக் 'காண்போம்' $x = 3 + h$ எனக்கொண்டு h இன் மதிப்பு பூச்சியத்தை நாடுகிறதெனக் கொள்வோம் ; அப்போது $x \to 3$.

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(3+h)^2-9}{(3+h)-3} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h$$

$h \to 0$ ஆகையால்

எல்லை $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ எனப் பெறப்படுகிறது. $x = 3-h$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(3-h)^2-9}{(3-h)-3} = \frac{-6h+h^2}{-h}$$
$$= 6-h$$

$h \to 0$ ஆனால் $\frac{x^2-9}{x-3} \to 6$.

எனவே அப்போதும்

எல்லை $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ ஆகிறது. ஆகவே x இன் மதிப்பு 3க்கு மிகையாயிருந்து 3ஐ நாடினாலும் சரி, 3க்குக் குறைவாயிருந்து 3ஐ நாடினாலும் சரி, எல்லை $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

(2) எல்லை $\lim_{x \to -a} \frac{x^3+a^3}{x+a}$ என்ன ?

$x = -a$ ஆனால் $\frac{x^3+a^3}{x+a} = \frac{-a^3+a^3}{-a+a} = \frac{0}{0}$ என்ற தேராக் கணியம்.

எனவே $x = -a+h$ எனக்கொண்டு h இன் மதிப்பைப் பூச்சியத்திறகு நாடச் செய்து எல்லை காண்போம்.

$$\frac{x^3+a^3}{x+a} = \frac{(-a+h)^3+a^3}{(-a+h)+a}$$
$$= \frac{3a^2h-3ah^2+h^3}{h}$$
$$= 3a^2-3ah+h^2$$

$h \to 0$ என்னும்போது $-3ah \to 0$; $h^2 \to 0$ எனவே

$$\text{எல்லை}_{x \to -a} \frac{x^3 + a^3}{x+a} = 3a^2$$

$x = -a - h$ எனக்கொண்டு சரி பார்க்கவும்.

(3) $\text{எல்லை}_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 7x + 5}$ என்ன ?

$x = 1$ ஆனால் $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 7x + 5} = \dfrac{0}{0}$ என்ற தேராக்கணியம்.

எனவே $x = 1 + h$ எனக் கொண்டு h இன் மதிப்பை பூச்சியம் எல்லையை அணுகச் செய்வோம்.

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 7x + 5} = \frac{(1+h)^2 - 4(1+h) + 3}{2(1+h)^2 - 7(1+h) + 5}$$

$$= \frac{-2h + h^2}{-3h + 2h^2}$$

$$= \frac{h\,(h-2)}{h\,(2h-3)}$$

$$= \frac{h-2}{2h-3}$$

$h \to 0$ என்னும்போது $2h \to 0$; எனவே

$$\text{எல்லை} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 7x + 5} = \frac{2}{3}$$

1.6 கந்தழி எல்லைகள் (Infinite Limits)

$y = \dfrac{1}{x}$ என்ற சார்பின் வளைவரையை 1.441 இல் பார்த்தோம்.

x இன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பாய் மிக மிகப் பெரிதாகிக் கொண்டே போனால் y இன் மதிப்பு மிக மிகக் குன்றி பூச்சிய எல்லையை நாடுகிறது.

இதை $\text{எல்லை}_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ எனக்கூறலாம். அவ்வாறே $\text{எல்லை}_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

இப்போது x இன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பாகவே இருந்து கொண்டு பூச்சிய எல்லையை நாடினல், $\frac{1}{x}$ இன் மதிப்பு மிக மிகப் பெரிதான கூட்டு மதிப்பைப் பெறுகிறது. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையைக் காண்க.

x	·1	·01	·005	·001	·0000001
$\frac{1}{x}$	10	100	200	1000	10,000,000

எனவே x இன் மதிப்பை கூட்டு மதிப்பாகவே கொண்டு சிறிதாக்கிக் கொண்டே போனல் $\frac{1}{x}$ இன் மதிப்பு, நாம் நினைத்துப் பார்க்கக்கூடிய எந்த மதிப்புக்கும் பெரிதாக ஆக்கலாம்.

இதை $\underset{x\to O}{\text{எல்லை}}\frac{1}{x}$ = கந்தழி = ∞ எனக் கூறுவது மரபு.

x இன் மதிப்பு குறை மதிப்பாக இருந்துகொண்டு பூச்சிய எல்லையை நாடினல், $\frac{1}{x}$ இன் மதிப்பு குறை மதிப்புடைய ஒரு பெரிய எண்ணுகும். கீழ்க்கண்ட அட்டவணையைக் காண்க.

x	—·1	—·01	—·0001	—·00000001
$\frac{1}{x}$	—10	—100	—10000	—100000000

எனவே இங்கு.

$\underset{x\to O}{\text{எல்லை}}\frac{1}{x}$ = — கந்தழி = — ∞ எனக் கூறலாம்.

எனவே x இன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பாய் பூச்சிய எல்லையை நாடும்போது

$\underset{x\to +O}{\text{எல்லை}}\frac{1}{x} = +\infty$ எனவும்

$\underset{x \to -0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{x} = -\infty$ எனவும் வெவ்வேறு எல்லைகள் பெறப்படுவது காண்க.

$$\text{ஆனால் } \underset{x \to +0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\underset{x \to -0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

என்றபடி அமைவதும் காண்க.

இதற்குமேல் விரிவாக கந்தழி எல்லைகளைப்பற்றி உயர் கணிதத்தில் காணலாம்.

ID சார்புகளின் தொடர்ச்சித் தன்மை

(Continuity of Functions)

1.70 சார்புகளைப்பற்றிய மற்ரொரு பண்பினைப் பார்ப்போம். அது சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மை எனப்படும் பண்பாகும்.

1.71 தொடர்ச்சியான மாற்றம். x என்ற மாறி a, b இரு திட்டமான மதிப்புக்களிடையே $(a \leq x \leq b)$ உள்ள எல்லா மதிப்புக்களையும், ஏதும் விலக்கின்றி, ஏற்குமாயின், அது (a, b)க்கு இடையே தொடர்ச்சித் தன்மை பெற்றதெனக் கூறப்படும். (a, b) என்பது அதன் இடைவெளி (Interval) அல்லது வீச்சு (Range) எனப்படும்.

1.711 ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சித் தன்மை (Continuity of a function)

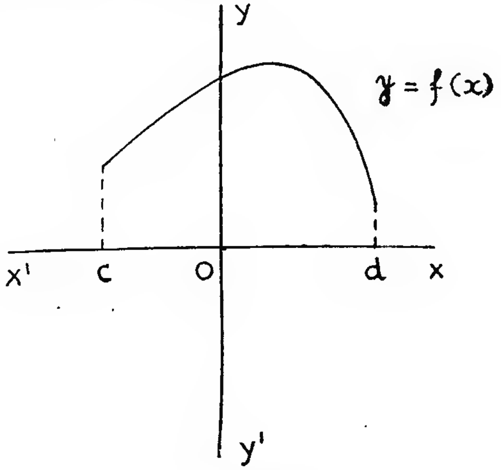
வரையறை : x என்னும் சார்பில் மாறிலி (a, b) என்ற இடைவெளியில் உள்ள எல்லா மதிப்புக்களையும் ஏற்கும் போது, yக்கு ஓரோர் திட்டமான மதிப்பு இருந்து, x இல் ஏற்படும் சிறிய மாறுதல்களுக்கு ஏற்ப y இலும் சிறிய மாறுதல்கள் ஏற்பட்டு, x இல் ஏற்படும் சிறிய மாறுதல்கள் பூச்சிய மதிப்பை அணுகுங்கால், y இல் ஏற்படும் சிறிய மாறுதல்களும் பூச்சிய மதிப்பை அணுகுமாயின், (a, b) என்ற இடைவெளியில் $y = f(x)$ என்பது x ஒட்டிய ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பெனப்படும்.

அதாவது, எந்த ஒரு x இன் சிறிய மாறுதலுக்கும் y இல் ஏற்படும் மாறுதல் திடீரென்று ஒரு மதிப்பிலிருந்து மற்றோர் மதிப்புக்கு மாருமலும், y இன் மதிப்பு கந்தழியாகாமலும்

இருக்கவேண்டும். அப்போதுதான் $y = f(x)$ என்பது குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனப் படும். மேலெழுந்த வாரியாகக் கூறினுல் $x = a$ முதல் $x = b$ வரை, ஒரு சார்பு $y = f(x)$ இன் வளைவரை திடீர் மாற்றங் களில்லாமல், ஒரு தொடர்ச்சியானதாயிருப்பின், அச்சார்பு $y = f(x)$ என்பது (a, b) என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சி யானதாகவிருக்கும். ஆனுல் இதை சுத்தமான வரையறை யென ஏற்பது நல்லதல்ல. மற்றோர் வகையில் இதைக் கூறினுல் :

"ஆரம்பித்த இடத்தில் வைத்த பென்சிலை காகிதத்தை விட்டு எடுக்காமல் அவ்வளைவரையை வரைய இயலும்."

சில படங்கள் மேற்கூறிய தொடர்ச்சித் தன்மை/தொடர்ச் சியற்ற தன்மையை விளக்கும்.

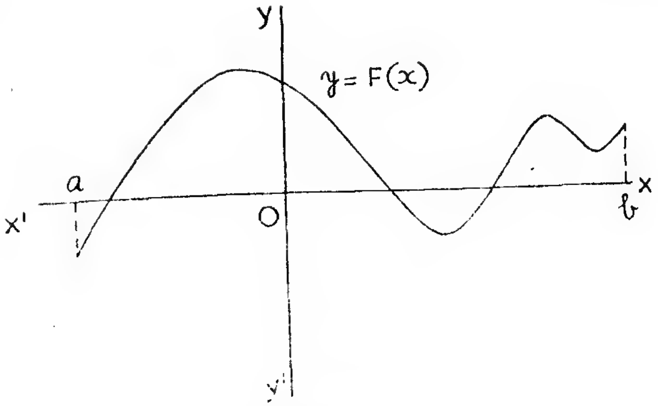


படம் 1.721

(1) படம் 1.721 இல் $x = c$ முதல் $x = d$ வரை $y = f(x)$ தொடர்ச்சியானது;

(2) $x = a$ முதல் $x = b$ வரை $y = F(x)$ தொடர்ச்சியானது என்பதை படம் 1.722 இல் காண்க.

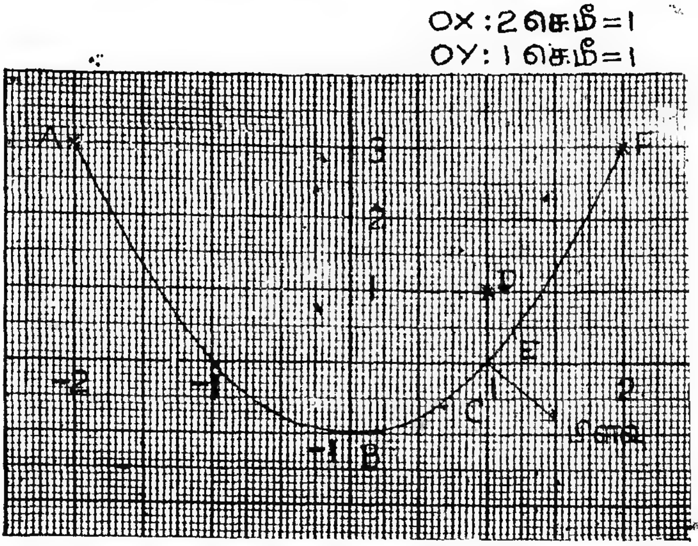
$y = x^2$ என்ற சார்பு, எந்த இடைவெளியிலும் தொடர்ச்சி யானது; அவ்வாறே $y = \sin x$; $y = \cos x$ என்ற சார்புகளும்.



படம் 1,722

(ii) படம் 1.723 இல் பின்வரும் சார்பு வளைவரையாகக் காட்டப்பட்டிருக்கிறது; $x = 1$ என்ற மதிப்புக்குத் தவிர $y = x^2 - 1$; $x = 1$க்கு $y = 0$

x	0	0.5	0.8	1	2	−1	−2
y	−1	−0.75	−0.36	0	3	0	3



படம் 1,723

வளைவரை முதற் பகுதி ABC ; $D(1, 1)$ என்பது வளைவரையின் மேல் ஒரு புள்ளி ; வளைவரையின் மற்ற பகுதி EF.

இச் சார்பு $x=1$ என்ற இடத்தில் மட்டுமே தொடர்ச்சித் தன்மை பெறுவதில்லை. 1 என்ற மதிப்பை விலக்கிய மற்றெந்த இடைவெளியை எடுத்துக் கொண்டாலும், இச்சார்பு தொடர்ச்சித் தன்மை உடையது. $x=1$ என்ற இடத்தில், வளைவரையில் ஒரு பிளவு ஏற்படுவதைக் காண்க.

(iii) $y=\frac{1}{x}$ என்ற சார்பு $x=0$ என்ற மதிப்புக்கு மட்டும் தொடர்ச்சித் தன்மை பெற்றதல்ல.

படம் 1.441 காண்க.

$x=-\cdot 001$ க்கு y இன் மதிப்பு $-1000=f(-\cdot 001)$

$x=+\cdot 0001$ க்கு y இன் மதிப்பு $10000=f(\cdot 0001)$

$f(\cdot 0001)-f(-\cdot 001)=11000.$

இன்னும் நெருக்கமாக x இன் மதிப்பினை x இன் இரு பக்கங்களிலிருந்து கொண்டு வந்தால், இவ்விரு மதிப்புக்களின் வேறுபாடு மிகமிகப் பெரிதாக வளர்ந்து கொண்டே போகும். எனவே $x=0$ என்ற மதிப்பிற்கு மட்டுமே, 1·711 இல் தொடர்ச்சித் தன்மை எனக் கொடுக்கப்பட்ட வரையறைக்கு இச் சார்பு உட்படாது போகிறது. இதே மாதிரி $y=\frac{1}{x-1}$ என்ற சார்பு $x=1$ என்ற மதிப்புக்கு மட்டுமே தனது தொடர்ச்சித் தன்மையை இழக்கிறது.

$y=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ என்ற சார்பு $x=1, 2, 3, 4$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு மட்டும் தனது தொடர்ச்சித் தன்மையை இழக்கிறது. அவ்வாறே $y=\tan x$ என்ற சார்பு $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \ldots\ldots \frac{-(2n+1)\pi}{2}$ என்ற இடங்களிலெல்லாம் தன் தொடர்ச்சித் தன்மையை இழக்கிறது. இவ்வாறே $y=\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ என்ற சார்புகள் தமது தொடர்ச்சித் தன்மையை இழக்கும் இடங்களை அறிந்து கொள்க.

1.73 தொடர்ச்சியான சார்புகளின் தன்மைகள் :

சார்புகளின் தொடர்ச்சிப் பண்புகளைப் பற்றி முன்கூறிய திலிருந்து, பின்கூறப்படும் இரண்டு முக்கியமான தன்மைகள் வெளிப்படையாகும்.

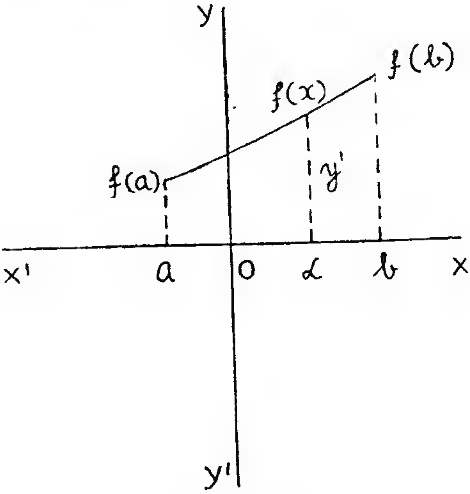
$x=a$ முதல் $x=b$ வரை $y=f(x)$ என்ற சார்பு ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு எனக் கொள்வோம். அப்போது $x=a$ ஆனால் $y=f(a)$; $x=b$ ஆனால் $y=f(b)$.

(1) $x=a$ முதல் $x=b$ வரை, x தனது மதிப்புக்களை ஏற்கும் போது, $f(a)$ முதல் $f(b)$ வரை உள்ள எல்லா மதிப்புக்களையும் y ஆனது குறைந்தது ஒரு முறையேனும் அந்த இடைவெளியில் ஏற்கும். (படம் 1.731 முதல் படம் 1.7 5 வரை காண்க).

(2) $f(a)$ இன் மதிப்பும் $f(b)$ இன் மதிப்பும் மாறுபட்ட குறிகளை உடையனவாயின், ($\pm$), குறைந்தது ஒரு முறையேனும் $x=\alpha$ என்ற ஏதாமொரு மதிப்புக்கு $f(x)$ பூச்சியமாகும். (படம் 1.732 1.7:3, 1.735 காண்க).

அதாவது $f(\alpha)=0$ ஆகும்.

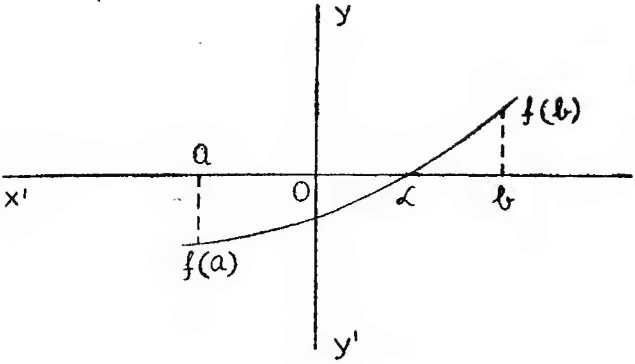
பின்வரும் வளைவரை படங்களில் இவற்றின் உண்மைகளைக் கண்டு கொள்க



படம் 1.731

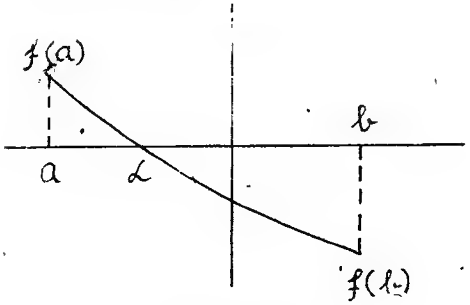
$$f(a) < y_1 < f(b)$$
$$f(\alpha) = y_1$$

$f(a)$ குறை மதிப்பு
$f(b)$ கூட்டு மதிப்பு
$f(\alpha)=0 \quad (a<\alpha>b)$



படம் 1.732

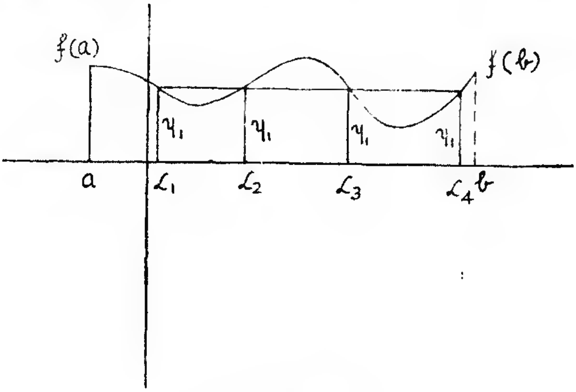
$f(a)$ கூட்டு மதிப்பு
$f(b)$ குறை மதிப்பு
$f(\alpha)=0 \ (a<\alpha<b)$.



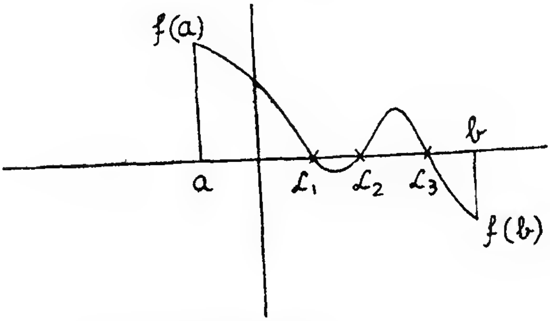
படம் 1.733

$a<x<b$ என்ற இடைவெளியில் $y_1=f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3)= f(\alpha_4)$; நான்கு முறை $f(x)$ இன் மதிப்பு, y_1க்குச்

சமமாகிறது காண்க. 'குறைந்தது ஒரு முறையேனும்' என்று 1·73 (1) இல் கூறப்பட்டதைக் கவனிக்க.



படம் 1.734



$f(a)$ கூட்டுக் குறி.
$f(b)$ குறைக் குறி.

படம் 1.735

$0=f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=f(\alpha_3)$; மூன்று முறை $f(x)$ இன் மதிப்பு பூச்சியமாகிறது.

'குறைந்தது ஒரு முறையேனும்' என்று 1.73 (2) இல் கூறப் பட்டதைக் கவனிக்க.

நாம் புகுமுக வகுப்பு நிலையில், காணவிருக்கும் சார்புகள் எப்பொழுதுமோ அல்லது குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளுக் குள்ளோ, தொடர்ச்சித் தன்மை பெற்றவை என ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.

பின்னர் வர இருப்பதை, முன்கூட்டியே சொல்லும் வகையால், 'x இல் ஒரு சிறு மாற்றம் h ஏற்படின், அதற்குரிய yஇன் மாற்றம் k யும் சிறிதாயிருக்கும்; h இன் மதிப்பு சிறுகச்சிறுக, k இன் மதிப்பும் சிறுத்துக்கொண்டே போகும்; h இன் மதிப்பு பூச்சிய மதிப்பை அணுக அணுக, k இன் மதிப்பும் பூச்சிய மதிப்பை அணுகும்; $h=0$ ஆனல் k யும் பூச்சியமாகும்' என்று கூறி இப்பகுதி முடிக்கப்படுகிறது. இப்பண்பு தொடர்ச்யான சார்புகளுக்குரிய சிறந்த பண்பாகும்.

பயிற்சி 1

1. பின்வரும் வரைபடங்கள் வரைந்து பார்க்க.

(a) $y=x^2-2x+3$

(b) $y=2x-x^2-3$

(c) $y=-x^3$

(d) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

(e) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

இப்படங்களில் சிறப்பான முடிவுகள் ஏதேனுமிருப்பின் அவற்றினைக் குறிப்பிடுக.

2. பின்வரும் சார்புகளுக்கு வரைபடங்கள் வரைந்து எங்கெங்கு அச்சார்புகள் தொடர்ச்சித் தன்மையை இழக்கின்றனவெனக் காண்க.

(a) $0 \leq x < 1$ என்ற இடைவெளியில் $y=x$
$1=x<2$ என்ற இடைவெளியில் $y=x+1$

(b) $y=\tan 2x$ ($x=-\pi$ முதல் $x=2\pi$ வரை)

(c) $-2 \leq x \leq 2$ என்ற இடைவெளியில் $y=x^2$.
$x>3$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $y=x^2+1$.
$2>x \leq 3$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $y=1$.

II. சில அடிப்படை எல்லைகள்

(Some fundamental Limits)

2.0 இந்தப் பகுதியில் நமக்குப் பின்னர் பயன்படக் கூடிய சில அடிப்படையெல்லைகளைக் காண்போம்.

2.1 (1) $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

இது n இன் எல்லா அளவுகளுக்கிணங்கிய மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும்.

(i) முதலாவது n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணெனக் கொள்வோம். $x = a + h$ என ஈடு செய்வோம்.

$x \to a$ என்னும்போது $h \to 0$ என்பது வெளிப்படை. எனவே

$$\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(a+h)^n - a^n}{(a+h) - a}$$

$$= \underset{h \to O}{\text{எல்லை}} \frac{na^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{|\underline{2}} a^{n-2}h^2 + \ldots\ldots\ldots \text{ மற்றும் } h \text{ இன் மேற்படிகள்.}}{h}$$

(ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி).

$= na^{n-1} + h \left[\dfrac{n(n-1)}{|\underline{2}} a^{n-2} + \ldots\ldots\ldots h \right.$ உம், h இன் உயர்ந்த படிகளும் உள்ள உறுப்புக்கள்.]

எனவே $h \to o$ ஆனால்

$$\underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(a+h)^n - a^n}{(a+h) - a} = na^{n-1}.$$

(ii) இரண்டாவது n ஒரு குறை முழு எண்ணெனக் கொள்வோம், அதாவது $n=-m$, m கூட்டு முழு எண்.

எனவே $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ எல்லை

$$= \text{எல்லை}_{x\to a} \frac{\frac{1}{x^m}-\frac{1}{a^m}}{x-a}$$

$$= \text{எல்லை}_{x\to a} \frac{a^m-x^m}{x-a} \cdot \frac{1}{x^m\,a^m}$$

$$= -\text{எல்லை}_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x-a} \cdot \frac{1}{x^m\,a^m}$$

$$= \frac{-ma^{m-1}}{a^{2m}} \quad [2.1 \text{ இன் படி}]$$

$$= -ma^{-m-1}$$

$$= na^{n-1} \quad (\because \ n=-m;\ m \text{ கூட்டு முழு எண்}).$$

(iii) மூன்றாவது, n ஒரு கூட்டு அல்லது குறை, அளவுக்கிணங்கிய (பின்ன) எண்ணெனக் கொள்வோம்.

$n=\frac{p}{q}$ எனவும், p ஒரு கூட்டு அல்லது குறை முழு எண், q ஒரு கூட்டு முழு எண் எனவும் கொள்ளலாம். (p கூட்டு முழு எண்ணாயின் $\frac{p}{q}$ ஒரு கூட்டு அளவுக்கிணங்கிய எண்ணாகும்; p குறை முழு எண்ணாயின் $\frac{p}{q}$ ஒரு குறை அளவுக்கிணங்கிய எண்ணாகும்).

இங்கு $x^{\frac{1}{q}}=z$ என, அதாவது $z^q=x$ எனவும் $a^{\frac{1}{q}}=b$ என, அதாவது $b^q=v$ எனவும் கொள்வோம்.

$x\to a$ என்னும்போது $x^{\frac{1}{q}}\to a^{\frac{1}{q}}$, அதாவது $z\to b$ எனவும் ஏற்கலாம்.

$$\text{எல்லை}_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \text{எல்லை}_{x\to a} \frac{x^{\frac{p}{q}}-a^{\frac{p}{q}}}{x-a}$$

$$= \text{எல்லை}_{x \to b} \frac{z^p - b^p}{z^q - b^q}$$

$$= \text{எல்லை}_{z \to b} \left(\frac{z^p - b^p}{z - b}\right) \div \left(\frac{z^q - b^q}{z - b}\right)$$

$= pb^{p-1} \div qb^{q-1}$ (முன் 2.1 (i), (ii) இன் படி)

$$= \frac{p}{q} b^{(p-q)}$$

$$= \frac{p}{q} b^{q\left(\frac{p}{q} - 1\right)}$$

$$= n[b^q]^{\frac{p}{q} - 1}$$

$$= na^{n-1}.$$

எனவே $\text{எல்லை}_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ என்ற முடிவு, n இன் எல்லா அளவுகளுக்கிணங்கிய மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும்.

2.2 எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $\text{எல்லை}_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \text{எல்லை}_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$

$$= 3 \cdot 2^{3-1}$$

$$= 12 \text{ (வாய்பாட்டின்படி)}$$

இதை நேரடியாகவும் பெறலாம்.

$x = 2 + h$ எனக் கொண்டால், $x \to 2$ என்னும்போது, $h \to 0$ என்றாகும்.

$$\text{எனவே } \frac{x^3 - 8}{x - 2}_{x \to 2} = \text{எல்லை}_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{(2+h) - 2}$$

$$= \text{எல்லை}_{h \to 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h}$$

$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\ 12+6h+h^2$

$= 12.$

(2) $\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ என்ன?

$$\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\ \frac{x^m-a^m}{x^n-a^n} = \underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\ \frac{x^m-a^m}{x-a}\times\frac{x-a}{x^n-a^n}$$

$$= \frac{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{x^m-a^m}{x-a}}{\underset{x\to a}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{x^n-a^n}{x-a}}$$

$$= \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}$$

$$= \frac{m}{n}\ a^{m-n}$$

(3) எல்லை $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}$ என்ன?

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{3}{4}}}{x-a}\times\frac{x-a}{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}$$

$\therefore$ எல்லை $= \frac{3}{4}\,a^{\frac{3}{4}-1} \div \frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}-1}$

$$= \frac{\frac{3}{4}\,a^{-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{3}\,a^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{3}{1}\times\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{9}{4}\ a^{\frac{5}{12}}$$

(4) $\underset{x\to 4}{\text{எல்லை}}\ \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ என்ன?

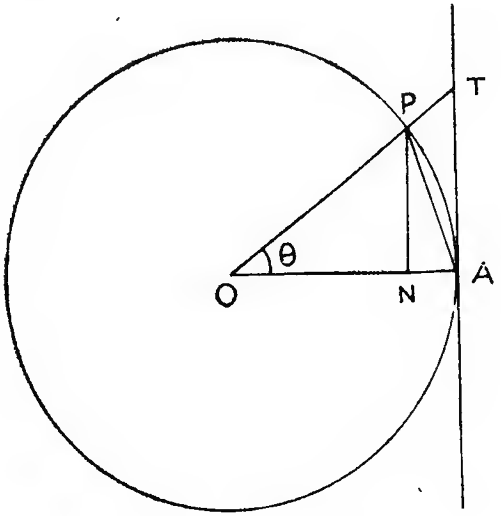
$$\text{வேண்டிய எல்லை} = \text{எல்லை}_{x\to 4} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}}{x-4}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, 4^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2.\sqrt{4}} = \tfrac{1}{4}.$$

மற்றும் சில அடிப்படை எல்லைகள் :

2.3 θ என்பது ஆரையன் (Radian) அளவில் கொள்ளப் பட்டால் $\text{எல்லை}_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.



படம் 2.3

O மையங்கொண்டு r அலகுகள் ஆரமுடைய ஒரு வட்டம் எடுத்துக் கொள்க. (படம் 2.3) வட்டவரையின் மேல் A, P என்ற இரு புள்ளிகளை இடம் குறித்துக் கொள்க. $\underline{|AOP} = \theta$ (ஆரையன் அளவில்) எனக் கொள்க. AP என்ற நாணும் AT என்ற தொடுவரையும் வரைந்து, OPஐ நீட்டி ATஐ T இல் வெட்டுவதாகக் கொள்க. P இலிருந்து OA இன் மேல் PN என்ற குத்துக்கோடு வரைக.

பரப்பளவில்,

$\Delta OAP <$ வட்டப்பகுதி $AOP < \Delta AOT$

அதாவது, $\frac{1}{2}\, OA.\, NP < \frac{1}{2}$ வில் $AP \times r < \frac{1}{2}\, OA.\, AT$

அதாவது, $\frac{1}{2}\, r.\, r \sin\theta < \frac{1}{2}\, r^2\theta < \frac{1}{2}\, r^2 \tan\theta$

அதாவது, $\sin\theta < \theta < \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin\theta$ ஆல் வகுக்க,

$1 < \dfrac{\theta}{\operatorname{Sin}\theta} < \dfrac{1}{\cos\theta}$ எனப்பெறப்படும்.

தலை கீழாய் எழுத,

$\dfrac{1}{1} > \dfrac{\sin\theta}{\theta} > \dfrac{\cos\theta}{1}$ எனப்பெறப்படும். இப்போது θ வின் மதிப்பு, 0 எல்லையை அணுகும்போது,

$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ வின் எல்லை 1க்கும் 1க்கும் இடைப்பட்டிருக்கும் ; ஏனெனில் $\cos 0 = 1$; எனவே $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ ஆகும்.

எனவே $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ எனப்பெறப்படும்.

கிளைத்தேற்றம் : $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to} \dfrac{\sin\theta}{\theta} \times \dfrac{1}{\cos\theta}$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

முக்கியக் குறிப்பு: இங்கு θ ஆரையன் அளவில் உள்ளது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது; மறந்துவிடக் கூடாது.

2.4 எடுத்துக் காட்டுகள் :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^\circ}{x}$ காண்க. (x—பாகை (degree) அளவில்)

$x^\circ = \dfrac{x \times \pi}{180}$ ஆரையன்கள்

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^\circ}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \frac{\pi x}{180}}{x}$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}} \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\pi}{180}$$

(2) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ காண்க.

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\sin mx}{mx} \times \frac{mx}{nx} \times \frac{nx}{\sin nx}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{m}{n} \times \frac{\sin mx}{mx} \div \frac{\sin nx}{nx}$$

$$= \frac{m}{n} \times \frac{1}{1}$$

$$= \frac{m}{n}$$

(3) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1-\cos x}{3x^2}$ என்ன ?

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{3x^2}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{2\left[\text{Sin}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}{3\left(\frac{x}{2}\right)^2 \times 4}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{6} \left[\frac{\text{Sin}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{6}$$

(4) $\underset{x\to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1-\cos ax}{bx^2}$ என்ன ?

$$\text{எல்லை}_{x\to o} \frac{1-\cos ax}{bx^2} = \text{எல்லை}_{x\to o} \frac{2\sin^2\left(\frac{a\,x}{2}\right)}{bx^2}$$

$$= \text{எல்லை}_{x\to o} \frac{2}{b} \frac{\left[\text{Sin}\left(\frac{a\,x}{2}\right)\right]^2}{\left(\frac{a\,x}{2}\right)^2 \frac{4}{a^2}}$$

$$= \frac{2a^2}{4b} \text{எல்லை}_{x\to o} \left[\frac{\text{Sin}\,\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right]^2$$

$$= \frac{a^2}{2b}.$$

(5) $\text{எல்லை}_{x\to o} \frac{\tan ax}{bx}$ என்ன ?

$$\text{எல்லை}_{x\to o} \frac{\tan ax}{bx} = \text{எல்லை}_{x\to o} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{ax}{\cos ax} \cdot \frac{a}{b}$$

$$= \frac{a}{b}$$

ஏனெனில் $\text{எல்லை}_{x\to o} \cos ax = 1$

மாற்றுமுறை :

$$\text{எல்லை}_{x\to o} \frac{\tan ax}{bx} = \text{எல்லை}_{x\to o} \frac{\tan ax}{ax} \cdot \frac{ax}{bx}.$$

$$= 1 \times \frac{a}{b} \quad \text{(கிளைத் தேற்றப்படி)}$$

$$= \frac{a}{b}.$$

பயிற்சி 2

பின் கொடுக்கப்பட்ட கணக்குகளில் குறிப்பிட்ட எல்லைகளைக் கணிக்க.

1. $\text{எலலை}_{x\to o} \frac{1+3x+x^2}{2+x-x^2}$

2. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{x+x^2+x^3}{3x+x^3}$

3. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{1+x+x^2+x^3}{x+x^2+x^3}$

4. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{x+x^2+x^3}{3-x}$

5. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{2x-1}{3x+4}$

6. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2-1}$

7. $\underset{x \to 9}{\text{எல்லை}} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

8. $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \dfrac{(x-a)^2 (x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

9. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\tan \pi x}{x}$

10. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{4-4\cos 3x}{x^2}$

11. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{1-\cos mx}{nx^2}$

12. $\underset{x \to a}{\text{எல்லை}} \dfrac{\sin (x-a)}{m(x-a)}$

13. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\sin 4x+\sin 2x+\sin x}{5x}$

14. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{எல்லை}} \dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^2}$

15. $\underset{x \to 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{3-\cos 3x-\cos 2x-\cos x}{3x^2}$

III. வகை நுண்கெழு காணல்

(Differentiation—finding the differential co-efficient)

3.1 மதிப்ப ஏற்றம் (Increment) :

$y = f(x)$ என்பது ஒரு x இன் சார்பு. (1) x இன் மதிப்பில் ஒரு சிறு மாற்றம் கொள்ளப்படும் போது (அல்லது ஒரு சிறு மாற்றம் ஏற்படும்போது) x ஒரு ஏற்றம் பெறுகிறது எனக் கூறப்படும். அச்சிறு ஏற்றம் Δx எனக் குறிக்கப்படும். (2) இவ் வேற்றம் இயற்கணித முறைப்படி, கூடுதலாயின் அது கூட்டு மதிப்பையும், குறைவாயின், குறை மதிப்பையும் பெறும்.

x இன் மதிப்பில் Δx என்ற சிறு ஏற்றம், ஏற்படும் போது, அதன் காரணமாக y இன் மதிப்பில் (அதாவது $f(x)$ இன் மதிப்பில்) ஒரு சிறு மாற்றம் ஏற்படலாம். (ஏற்படாது போயினும் போகலாம்). இச்சிறு மாற்றம் y இன் ஏற்றம் (increment in y) எனக் கூறப்படும். இச் சிறு ஏற்றம் Δy எனக் குறிக்கப்படும். இவ்வேற்றமும் (முன் கூறியபடி) இயற் கணித முறைப்படி, கூடுதலாயின், அது கூட்டு மதிப்பையும், குறைவாயின் குறை மதிப்பையும் பெறும்.

எனவே, $y = f(x)$ ஆனல்,

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ என எழுதுவது மரபு.

(1) y என்பது x இன் தொடர்ச்சியான சார்பு (continuous function) என்பது ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

(2) Δx என்பது ஒரே குறி; இதை Δ என்பது x ஐப் பெருக்கி வரும் தொகையெனக் கொள்ளுதல் கூடாது.

3.11 விளக்கம் :

(1) $y = x^2$ எனக் கொள்வோம்.

x இன் மதிப்பு Δx மிகுந்தால் y இன் மதிப்பு எவ்வளவு மிகும்? அதாவது Δy என்ன?

$$y = x^2 \text{ ஆனுல்,}$$
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$
$$(y + \Delta y - y) = \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$
$$= 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

(2) $y = \dfrac{1}{x}$ எனக் கொள்வோம். நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் மரபுப்படி

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$
$$\therefore \quad \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{x - x - \Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$$
$$= \frac{-\Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$$

(3) $y = x^3$

x இன் மதிப்பு 2 ஆனுல் y இன் மதிப்பு 8.

x இன் மதிப்பு 0.1 மிகுந்து 2.1 ஆனுல்

$$y + \Delta y = (2.1)^3$$
$$\therefore \ \Delta y = (2.1)^3 - 8$$
$$= 9.261 - 8$$
$$= 1.261.$$

x இன் மதிப்பு 0·1 குறைந்து 1·9 ஆனுல்

$$y + \Delta y = (1.9)^3$$
$$\therefore \ \Delta y = 6.859 - 8$$
$$= -1.141.$$

எனவே $\Delta x = +0.1$ ஆனுல், $\Delta y = +1{\cdot}261$

$\Delta x = -0.1$ ஆனுல், $\Delta y = +1.141.$

இங்கு பொதுவாக, நாம் Δy காண வேண்டுமானால்,

$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3$ எனக் கொண்டு

$\Delta y \quad =(x+\Delta x)^3-x^3$

$= 3x^2 \Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ எனப் பெறுகிறோம்.

x இன் மதிப்பு 2 ஆக இருந்து $\Delta x=\cdot 1$ ஆனால்,

$\Delta y=3(4)(\cdot 1)+3(2)(\cdot 1)^2+(\cdot 1)^3$

$=1\cdot 2+\cdot 06+\cdot 001$

$=1\cdot 261$ எனப் பெறப்படுவதைக் காண்க.

x இன் மதிப்பு 2 ஆக இருந்து $\Delta x=-\cdot 1$ ஆனால்,

$\Delta y= 3(4)(-\cdot 1)+3(2)(-\cdot 1)+(-\cdot 1)^3$

$=-1\cdot 2+\cdot 06-\cdot 001$

$=-1\cdot 141$ எனப் பெறப்படுவதைக் காண்க.

பயிற்சி 3.1

பின்வரும் சார்புகளுக்கு Δx க்குரிய Δy காண்க.

(1) $y=3x^2$ (2) $y=\dfrac{1}{x+1}$ (3) $y=x+\dfrac{1}{x}$

(4) $y=x^2-2$ (5) $y=2x^2+x-2$.

3.2 *வகை நுண்கெழு—வரையறை* (Differential coefficient—definition)

$y=f(x)$ என்ற சார்பில் x இன் ஏற்றம் Δx க்குரிய y இன் ஏற்றம் Δy எனக் கொண்டால்,

எல்லை $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ என்பது (இருக்குமானால்) yக்கு x ஐ ஒட்டிய வகை நுண்கெழு எனப்படும். (1) சுருக்கமாக வகைக்கெழு என்றே இனிக் கூறுவோம். (1)

மரபு : எல்லை $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ இன் மதிப்பை $\dfrac{dy}{dx}$ என எழுதுவது மரபு. நாம் முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டியது யாதெனில் :

(1) Δx, Δy இரண்டும் தனித்தனி மதிப்புக்களாகும்.

(2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ என்பது $\dfrac{\text{மேலெண்}}{\text{கீழெண்}}$ என்ற முறையில் அமையும் ஒரு பின்னமாகும்.

(3) ஆனால் எல்லை $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ என்ற எல்லை மதிப்பைக் கண்டு பிடித்து விட்ட பின்பு அது ஒரு சிறப்பான மதிப்பு.

அம் மதிப்பை $\frac{dy}{dx}$ எனக் கூறும்போது,

(1) எல்லை $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ என்பதற்கு எல்லை மதிப்பு கிடைக்கவில்லையானால் நாம் காணவேண்டிய வகை நுண் கெழு இல்லை என்று கூறப்படும். ஆனால் நாம் புகுமுக வகுப்பு நிலையில் இம்மாதிரியான சார்புகளைப் பற்றி ஆராயப் போவதில்லை.

dy, dx என்பவற்றிற்கு தனி மதிப்புக்கள் ஒன்றுமில்லை: மேலும் அது மேலெண் dy ÷ கீழெண் dx என்ற அமைப்பும் அல்ல. ஆகவே $\frac{dy}{dx}$ ஐ ஒரு பின்னமென நினைப்பது தவறு. அது ஒரு எல்லையின் மதிப்பை சுருங்கக் கூறும் ஒரு குறியீடேயொழிய மற்றெதுவும் இல்லை.

மேலும் பார்ப்போம்:

$y = f(x)$ எனக் கொண்டால்,

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ எனக் கொள்கிறோம்.

$\therefore \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$

இருபுறங்களையும் Δx ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x}.$$

ஆகவே,

$$\frac{dy}{dx} = \text{எல்லை}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{எல்லை}_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

என எழுதலாம்.

எனவே எல்லை $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ என்பது $f(x)$ இன் x ஐ ஒட்டிய வகைக்கெழு என்றும் கூறலாம்.

இதை $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = f'(x)$ என எழுதுவது மரபு. இங்கு நாம் கவனிக்க வேண்டியது யாதெனில்,

(1) $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$ முழுவதும் ஒரே குறியீடு. அதைப் பிரித்துப் பிரித்து, d, dx, $f(x)$ என்று தனித்தனியாக நாம் பார்ப்பதில்லை;

(2) $f'(x)$ என்பது $f(x)$ இன் x ஐ ஒட்டிய வகைக்கெழுவினைக் குறிக்கும் குறியீடு.

(3) $f(x)$ இன் x ஐ ஒட்டிய வகைக்கெழுவினை $D\,f(x)$ என்ற குறியீட்டாலும் தெரிவிப்பது மரபு. இங்கு D என்பது $f(x)$ ஐப் பெருக்கும் ஓர் இராசியல்ல; இதுவும் ஒரு முழுக் குறியீடாகும். இங்கு D என்பது ஒரு செயலி (operator) எனக் கூறப்படும்; அதாவது $D\,f(x)$ எனக் கூறும்போது, D என்பது வகைக்கெழு காணும் செயன் முறை (operation) எனக் கொள்ளப்படும்.

(4) வகைக்கெழு என்பதை, "differential co-efficient", "derived function", "derivative", எனக் கூறுவது ஆங்கிலத்து மரபாகும்.

3.21 $y = f(x)$ என்ற சார்பிற்கு, x ஒட்டிய வகைக்கெழு காணும் வழி படிப்படியாகப் பின்வருமாறு :

(1) x என்னும் சார்பில் மாறி Δx என்ற ஏற்றம் பெறச் செய்தல்;

(2) அதன் காரணமாக y என்னும் சார்புடை மாறி Δy என்னும் ஏற்றம் பெறச் செய்தல் அல்லது $f(x)$ என்ற சார்பு, $f(x+\Delta x)$ என்னும் மதிப்பேற்று, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ என்ற ஏற்றம் பெறச் செய்தல்.

(4) $\Delta x \to 0$ என்னும் நிலையில் Δy யும், $\to 0$ எனவாகிறது. அந்த நிலையில்,

$$\text{எல்லை}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{எல்லை}_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

என்ற மதிப்பை அறிதல்.

இவ் வெல்லையே $\frac{dy}{dx}$ எனப்படும்.

3.22 வரையலறையின் அடிப்படையில் சில சிறப்பான x இன் சார்புகளின் வகைக்கெழு காணல் :

$y=x^n$ (n எல்லா அளவுக்கிணங்கிய படிகளையும் ஏற்கிறது.)

x இன் மதிப்பில் ஏற்றம் Δx எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad y=x^n$$

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}= \underset{\Delta x\to o}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x\to o}{\text{எல்லை}} \frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}$$

இங்கு $(x+\Delta x)=z$ என ஈடு செய்க. அப்போது $\Delta x\to o$ என்னும்போது $z\to x$

$$\text{எனவே } \frac{dy}{dx}= \underset{z\to x}{\text{எல்லை}} \frac{z^n-x^n}{z-x}$$

$$= nx^{n-1} \text{ (......2.1...... காண்க).}$$

(2) $y=\sin x$ (x ஆரையன் அளவில்) முறைப்படி,

$$y+\Delta y=\sin (x+\Delta x)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin (x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to o}{\text{எல்லை}} \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

$$= \cos x \quad \text{ஏனெனில்} \quad \text{எல்லை}_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\operatorname{Sin} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = 1$$

........2·3 காண்க.

[$x \to 0$ என்னும்போது $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$ என்றாகிறது.]

(3) $y = \cos x$

முறைப்படி,

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \frac{2 \sin\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \sin\left(\frac{x - x - \Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \text{எல்லை}_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}$$

$$= -\sin x.$$

(4) $y = \tan x.$

முறைப்படி,

$$y + \Delta y = \tan(x + \Delta x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tan(x + \Delta x) - \tan x}{x}$$

$$= \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x.\ \cos(x+\Delta x)\ \cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\Delta x.\ \cos(x+\Delta x)\ \cos x}$$

$$= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x.\ \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லே}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x.\ \cos(x+\Delta x)\ \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x.$$

இவ்வாறே வரையறையின் அடிப்படையில்

$y = \cot x$ எனில் $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$ எனவும்

$y = \sec x$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$ எனவும்

$y = \operatorname{cosec} x$ எனில் $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$ எனவும்

கண்டறிக.

எனவே இதுவரை நாம் கண்ட, வகைக்கெழுக்களை பின் வரும் அட்டவணையில் காண்க. இவற்றினை மனப்பாடமாகச் (வாய்பாட்டு முறையில்) செய்து கொள்க.

$y = f(x)$ சார்பு	$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ வகைக்கெழு
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$.

(5) வரையறையின் அடிப்படையில் $y=\sqrt{x}$ என்ற சார்பிற்கு $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

முறைப்படி, $y=\sqrt{x}$

$$y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{(x+\Delta x)-x}$$

இங்கு $x+\Delta x=z$ எனக் கொள்க.

$\Delta x\to 0$ என்னும்போது, $z\to x$ எனத் தெரிகிறது.

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{எல்லை}_{z\to x} \frac{z^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{z-x}$$

$$=\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(6) வரையறையின் அடிப்படையில் $y=\cos 3x$ என்ற சார்பிற்கு $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

முறைப்படி, $y=\cos 3x$

$$y+\Delta y=\cos 3(x+\Delta x)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos 3(x+\Delta x)-\cos 3x}{\Delta x}$$

$$=\frac{2\sin\left[\frac{3x+3\Delta x+3x}{2}\right]\sin\left[\frac{3x-3x-3\Delta x}{2}\right]}{\Delta x}$$

$$=\frac{2\sin\left[3x+\frac{3\Delta x}{2}\right]\sin\left(-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{-2\sin\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\left(3.\frac{\Delta x}{2}\right)\times\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \text{எல்லை}_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\text{எல்லை}_{\Delta x \to o} \frac{\frac{-2\times 3}{2} \sin\left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}$$

$$= -3 \sin 3x.$$

(7) $y=(ax+b)^n$ ஆனல் வரையயறையின் அடிப்படையில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

முறைப்படி $y=(ax+b)^n$

$$y+\Delta y = [a(x+\Delta x)+b]^n$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[a(x+\Delta x)+b]^n - [ax+b]^n}{\Delta x}$$

$$= \frac{[a(x+\Delta x)+b]^n - [ax+b]^n}{\{[a(x+\Delta x)+b] - [ax+b]\}\frac{1}{a}}$$

$ax+b=u$ எனவும்,

$a(x+\Delta x)+b=v$ எனவும் கொள்க.

$\Delta x \to o$ ஆகும்போது $a\Delta x$ உம் $\to o$.

எனவே $\Delta x \to o$ ஆகும்போது $v \to u$

$$\therefore \quad \text{எல்லை}_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{எல்லை}_{v \to u} \frac{v^n - u^n}{(v-u).\frac{1}{a}}$$

$$= au^{n-1}$$

$$= v\,(ax+b)^{n-1}.$$

(8) $y=(ax+b)^4$ ஆனல், வரையறையின் அடிப்படையில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

இங்கு சென்ற எடுத்துக்காட்டு 7 இல் பயன்படுத்திய முறையல்லாது வேருேர் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி,

$$[a(x+\Delta x)+b]^4 = [(ax+b)+a\Delta x]^4$$

$$= (ax+b)^4 + 4(ax+b)^3 a\Delta x$$
$$+ 6(ax+b)^2 a^2 (\Delta x)^2 + 4(ax+b) a^3 (\Delta x)^3$$
$$+ a^4 (\Delta x)^4$$

$\therefore$ முறைப்படி, $\Delta y = [a(x+\Delta x)+b]^4 - [ax+b]^4$

$$= 4(ax+b)^3 .\ a\,\Delta x + 6(ax+b)^2 a^2 (\Delta x)^2$$
$$+ 4(ax+b).\ a^3 (\Delta x)^3 + a^4 (\Delta x)^4 \text{ —— (A)}$$

$\therefore \quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\text{(A) என்ற கோவை}}{\Delta x}$

$= 4(ax+b)^3 .\ a + \Delta x$ [ஒரு கோவை B]

$\Delta x \to 0$ என்னும்போது Δx [கோவை B] $\to 0$

எனவே

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= 4a(ax+b)^3.$$

பயிற்சி 3.2

வரையறையின் அடிப்படையில் பின்வரும் சார்புகளுக்கு x ஐ ஒட்டிய வகைக்கெழு காண்க.

1. $4x+3$
2. ax^2+bx+c
3. $(a-bx)^2$
4. x^3+x^2
5. $(x+1)(x-1)$
6. $\dfrac{1}{x^2}$
7. $\dfrac{1}{2x-1}$
8. $\dfrac{x+1}{x-1}$
9. $x \sin x$
10. $\sin mx$
11. $\cos mx$
12. $\tan 3x$

3.3 வகைக்கெழு காணல் வாய்பாடுகள்

வரையறையின் அடிப்படையில் பல சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காணல் அவ்வளவு வசதியானதன்று; அம்முறையில் சலிப்பேற்படும். சில வாய்பாடுகள் வகுத்துக் கொண்டு வகைக்கெழு காண்பது எளிதாகவும், விரைவாகவும் முடியும். எனவே, சில திட்டமான அமைப்புக்களில் $y=f(x)$ என்ற சார்பு அமையுமாயின் அதற்குரிய $\frac{dy}{dx}$ காணும் சில வழி வகைகளை இப் பகுதியில் காண்போம்.

பின்வரும் விளக்கங்களில் y சார்புடை மாறி எனவும், x சார்பில் மாறி எனவும், x-க்கு ஒட்டிய வகைக்கெழு காண்பதே நமது நோக்கமெனவும் கொள்க.

3.31 ஒரு மாறிலியின் வகைக்கெழு பூச்சியம்:

$y=c$ என்ற மாறிலியானால், y இன் மதிப்பு x ஐ ஒட்டியதல்ல.

எனவே $\Delta y=0$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{0}{\Delta x}=0.$$

2. $y=c\,f(x)$ என்ற அமைப்பு (c ஒரு மாறிலி)

ஒரு சார்பை ஒரு மாறிலியால் பெருக்கி வரும் சார்பின் வகைக்கெழு, அம் மாறிலியால முதற் சார்பின் வகைக்கெழுவினைப் பெருக்கக் கிடைக்கும்.

அதாவது $\frac{d}{dx}[c\,f(x)]=c\,f'(x)$

முறைப்படி $y=c\,f(x)$

$$y+\Delta y=c\,f(x+\Delta x)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{c\,f(x+\Delta x)-c\,f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \underset{\Delta x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{\text{எல்லை}}\ c\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=c\,f'(x).$$

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $y=4x^n$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}=4nx^{n-1}$

(2) $y=-4\cos x$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}=4\sin x.$

(3) $y=\emptyset(x)+F(x)-\phi(x)$ என்ற அமைப்பு

ஒரு சார்பு, பல சார்புகளின் இயற்கணிதக் கூட்டுத் தொகைக்குச் (algebraic sum of several functions) சமமாயின் முதற் சார்பின் வகைக்கெழு பின்னுள்ள சார்புகளது வகைக் கெழுக்களின் (அதே) இயற்கணிதக் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.

அதாவது $y=\emptyset(x)+F(x)-\phi(x)$ ஆனால்

$$\frac{dy}{dx}=\emptyset'(x)+F'(x)-\Psi'(x)$$

முறைப்படி,

$$y=\emptyset(x)+F(x)-\phi(x)$$

$$y+\Delta y=\emptyset(x+\Delta x)+F(x+\Delta x)-\phi(x+\Delta x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$\frac{[\emptyset(x+\Delta x)-\emptyset(x)]+[F(x+\Delta x)-F(x)]-[\Psi(x+\Delta x)-\Psi(x)]}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to 0}{\text{எல்லை}}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\emptyset'(x)+F'(x)-\Psi'(x)$$

இதைத் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தும்போது,

$y=F_1(x)\pm F_2(x)\pm F_3(x)\pm \ \dots\ \dots \pm F^n(x)$ ஆனால்

$$\frac{dy}{dx}=F_1'(x)\pm F_2'(x)\pm F_3'(x)\pm\dots\ \dots\pm F^{n'}(x)$$

எனப் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $y=\sin x+\cos x$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}=\cos x-\sin x.$

(2) $y = A\cos x + 3x^2$ ஆனால் $\frac{dy}{dx} = -A\sin x + 6x$

(3) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ஆனால்,

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c.$$

(4) $y = u \times v$ என்ற அமைப்பு : $[f(x) \times \varnothing(x)]$
u, v இரண்டும் x இன் சார்புகளாம்.

இரு சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையாக மற்றோர் சார்பு இருப்பின் இச் சார்பின் வகைக்கெழு = ஒரு சார்பு × இரண்டாம் சார்பின் வகைக்கெழு + இரண்டாம் சார்பு × முதற் சார்பின் வகைக் கெழு.

அதாவது

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

முறைப்படி, x ஒரு சிறு ஏற்றம் பெறும்போது, u என்ற சார்பு Δu என்ற ஒரு சிறு ஏற்றமும், v என்ற சார்பு Δv என்ற ஒரு சிறு ஏற்றமும், அதன் காரணமாக, y என்ற சார்பு Δy என்ற சிறு ஏற்றமும் பெறும். $\Delta x \to o$ ஆகும்போது, Δu உம், Δv உம், அதையொட்டி Δy உம் பூச்சிய எல்லையை நெருங்கும்.

$$\therefore \quad y = uv$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x}$$

$$= \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to o}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to o}{\text{எல்லை}} \left[u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \right]$$

இங்கு $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{dv}{dx}$ (எல்லை $\Delta x \to o$

$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{du}{dx}$ (எல்லை $\Delta x \to o$)

எல்லை $\frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \to \frac{du}{dx} \times 0 = 0$
$\Delta x \to o$

அல்லது எல்லை $\frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta x \to \frac{dv}{dx} \times 0 = 0$
$\Delta x \to o$

எனவே,

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

வாய்பாடாக இதை நோக்கும்போது, நாம் வகைக் கெழு காணும் முறையை பின்வருமாறு தொகுத்துக் கூறலாம்.

$y = u \times v$ எனக் கொண்டால்

முதலில் $\frac{du}{dx}$ ஐயும், $\frac{dv}{dx}$ ஐயும் கண்டுகொண்டு u ஐ $\frac{dv}{dx}$ ஆல் பெருக்கி வந்ததையும், vஐ $\frac{du}{dx}$ ஆல் பெருக்கி வந்ததையும் கூட்டிப் பெறுவதே y இன் x ஒட்டிய வகைக் கெழுவாகும்.

குறிப்பு :

$y = f(x)\varnothing(x)$ எனக் கொண்டால்

$\frac{dy}{dx} = f(x)\varnothing'(x) + \varnothing(x) f'(x)$ எனப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $y = \sin x \times \cos x.$

$$u = \sin x; \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$v = \cos x; \quad \frac{dv}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= \cos 2x.$$

(2) $y = 3x^3 \sin x.$

$$u = 3x^3; \quad \frac{du}{dx} = 9x^2$$

$$v = \sin x \; ; \quad \frac{dv}{dx} = \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= 3x^3 \cos x + 9x^2 \sin x.$$

(3) $y = (x^3+x^2+1)\,(x^2+3x+2)$

$$u = x^3+x^2+1 \; ; \quad \frac{du}{dx} = 3x^2+2x$$

$$v = x^2+3x+2 \; ; \quad \frac{dv}{dx} = 2x+3$$

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

$= (x^3+x^2+1)\;(2x+3) + (x^2+3x+2)\;(3x^2+2x)$ இதைச் சுருக்கியும் எழுதலாம்.

மேலும், இந்தப் பெருக்கல் சார்பின் விதியை விரிவு படுத்தலாம் :

$y = u\,v\,w$ எனக் கொள்க.

u, v, w மூன்றும் x இன் சார்புகள். எனவே y யும் ஒரு x - இன் சார்பாகும். x ஒரு சிறு ஏற்றம் Δx ஏற்கும்போது, u, v, w, மூன்றும் முறையே Δu, Δv, Δw என்ற ஏற்றங்கள் பெற்று, y ஒரு சிறு ஏற்றம் Δy பெறும்.

இங்கு $\dfrac{dy}{dx} = vw\dfrac{du}{dx} + wu\dfrac{dv}{dx} + uv\dfrac{dw}{dx}$ என்ற வாய்பாடு உண்மையாகும்.

தெரிப்பு : $y = uvw$

$= u \times (vw)$ எனப் பிரித்துக் கொள்க.

(vw) என்பதை z என்ற ஒரு சார்பாகக் கொள்க

அப்போது,

$$y = uz$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u\,\frac{dz}{dx} + z\,\frac{du}{dx}$$

ஆனல் $\dfrac{dz}{dx} = v\,\dfrac{dw}{dx} + w\,\dfrac{dv}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u\left[v\frac{dw}{dx} + w\frac{dv}{dx}\right] + vw\frac{du}{dx}$$

$$= uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

கவனத்தில் வைக்கும் முறை :

u, v, w என்ற ஒவ்வொன்றிற்கும் வகைக்கெழு காண்க.

இரண்டிரண்டாக (அதாவது *vw, wu, uv*) அச்சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையை விடப்பட்ட சார்பின் வகைக்கெழுவால் பெருக்கி, எல்லாவற்றையும் கூட்டினால் $\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(u\, v\, w)$

எடுத்துகாட்டு

(1) $y = x^2 \cos x \sin x$

$$u = x^2 ;\ \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$v = \cos x ;\ \frac{dv}{dx} = -\sin x$$

$$w = \sin x ;\ \frac{dw}{dx}\ \cos x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = vw\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}$$

$$= 2x \cos x \sin x - x^2 \sin^2 x + x^2 \cos^2 x$$

$$= x \sin 2x + x^2 \cos 2x$$

(2) $y = (x^2 + 1)\ (x^3 + x)\ (x^4 + x^2)$

$$u = x^2 + 1 ;\ \frac{du}{dx} = 2x$$

$$v = x^3 + x ;\ \frac{dv}{dx} = 3x^2 + 1$$

$$w = x^4 + x^2 ;\ \frac{dw}{dx} = 4x^3 + 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = vw\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}$$

$$= (x^3 + x)\ (x^4 + x^2)\ 2x + (x^2 + 1)\ (x^4 + x^2)$$
$$(3x^2 + 1) + (x^2 + 1)\ (x^3 + x)\ (4x^3 + 2x)$$

இதைச் சுருக்கியும் எழுதலாம்.

(3) $y = \sin^2 x \cos x$

$$u = \sin x\ ;\ \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$v = \sin x\ ;\ \frac{dv}{dx} = \cos x$$

$$w = \cos x;\ \frac{dw}{dx} = \sin x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = vw\frac{du}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}$$

$$= \sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

$$= 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$$

(5) $y = \frac{u}{v}$ என்ற அமைப்பு : $\left[\frac{f(x)}{\varnothing(x)}\right]$

ஒரு சார்பை வேறொரு சார்பு வகுக்கும் வகையில் மற்றோர் சார்பு இருக்குமானால்,

$$\left.\begin{array}{l}\text{இச்சார்பின்}\\\text{வகைக்கெழு}\end{array}\right\} = \frac{\text{கீழ்ச்சார்பு} \times \text{மேற்சார்பின் வகைக்கெழு} - \text{மேற்சார்பு} \times \text{கீழ்ச்சார்பின் வகைக்கெழு}}{(\text{கீழ்ச்சார்பு})^2}$$

அதாவது $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

தெரிப்பு :

முறைப்படி, $y = \frac{u}{v}$

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$= \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)\quad \Delta x}$$

$$= \left[v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] \times \frac{1}{v(v + \Delta v)}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ என்னும்போது

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow \frac{dv}{dx}$$
$$\Delta v \rightarrow 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\text{எல்லை}} \left[v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \frac{1}{v(v + \Delta v)}$$

$$= \left[v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right] \frac{1}{v^2}$$

$$= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{du}{dx}}{}$$

கிளைத்தேற்றம் : u என்பது ஒரு மாறிலி $= C$ ஆனால் $\frac{du}{dx} = 0$

எனவே $y = \frac{c}{v}$ இன் வகைக்கெழு $= -\frac{c}{v^2} \frac{dv}{dx}$

சிறப்பாக, $y = \frac{1}{v}$ ஆனால் $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx}$

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $y = \cot x$; வகைக்கெழு காண்க.

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$u = \cos x \; ; \; \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$v = \sin x \; ; \; \frac{dv}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x$$

(2) $y = \sec x$; வகைக்கெழு காண்க.

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

$$u = 1 \; ; \; \frac{du}{dx} = 0$$

$$v = \cos x \; ; \; \frac{dv}{dx} = -\sin x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \times 0 - 1 \times -\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec x \tan x$$

(3) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$; $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

$$u = x^2 - x + 1 \; ; \; \frac{du}{dx} = 2x - 1$$

$$v = x^2 + 1 \; ; \; \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)\;(2x - 1) - (x^2 - x + 1)\,2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

(4) $y = \dfrac{(x+1)\,(x+2)}{(x+3)}$; $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

$$= \frac{x^2+3x+2}{x+3}$$

$$u = x^2+3x+2; \; \frac{du}{dx} = 2x+3$$

$$v = x+3 \; ; \quad \frac{dv}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x+3)\,(2x+3) - (x^2+3x+2)\,.1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{x^2+6x+7}{(x+3)^2}$$

மற்ருேர் முறையில்

$u=(x+1)\ (x+2)$ என அப்படியே வைத்து பெருக்கல் வாய்பாடு [3·31(4) பயன்படுத்தி]

$\frac{du}{dx}=(x+1)+(x+2)=2x+3$ எனவும் கண்டு பின்னர் $\frac{dy}{dx}$ காணலாம்.

எனவே இதுவரை நாம் அறிந்த வாய்பாடுகளைத் தொகுத்தெழுதுவோம். $y,\ u,\ v,\ w$ யாவும் x இன் சார்புகள்; ஒவ்வொன்றிற்கும் x ஒட்டிய வகைக் கெழு உண்டு.

$y=$	$\frac{dy}{dx}$	விதி
c மாறிலி	0	மாறிலிக்குத் தனியாக வகைக்கெழு பூச்சியம்.
$u \pm v$	$\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$	கூட்டல் விதி.
cu	$c\frac{du}{dx}$	மாறிலியால் பெருக்கல் விதி.
uv	$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$	பெருக்கல் விதி
uvw	$vw\frac{dv}{dx}+wu\frac{dv}{dx}+uv\frac{dw}{dx}$	தொடர்ப் பெருக்கல் விதி.
$\frac{u}{v}$	$\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	வகுத்தல் விதி

3·4 சார்பின் சார்பு (function of a function) :

y என்பது u என்ற மாறியின் சார்பு, u என்பது x என்ற மாறியின் சார்பு எனக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$y = u^2$; $u = \sin x$

$\therefore$ $y = \sin^2 x$ எனப் பெறலாம்.

பொதுவாக,

$y = f(u)$; $u = F(x)$ எனக் கொண்டால்

$y = f[F(x)]$ எனப் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$y = u^2 + \sin u \cos u + \sqrt{u}$

$u = x^2 + x + 1$ எனக் கொண்டால்

$y = (x^2 + x + 1)^2 + \sin(x^2 + x + 1) \cos(x^2 + x + 1)$
$+ \sqrt{x^2 + x + 1}$ என yஐ x இன் நேரடியான சார்பாக எழுதலாம். இவ்வாருன சார்புகள், 'சார்பின் சார்பு' எனப்படும்.

3.41 சார்பின் சார்புக்கு வகைக்கெழு காணும் முறை;

x இல் Δx க்கு உரிய y இன் ஏற்றம் Δy எனக் கொண்டால், இவ்வேற்றம் இரு படிகளாக (steps) ஏற்படுகிறது.

x இல் Δx ஏற்றமாயின், u இல் ஏற்றம் Δu ஆகி, u இல் Δu ஏற்றமாயின், y இல் ஏற்றம் Δy ஆகிறது.

$\Delta x \to o$ ஆகும்போது, $\Delta u \to o$ ஆகி, Δy உம் $\to o$ ஆகிறது.

எனவே $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$ எனக் கொள்ளலாம். இரு பக்கங்களுக்கும் எல்லை காணும்போது,

$$\text{எல்லை}_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{எல்லை}_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \text{எல்லை}_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \text{எல்லை}_{\Delta x \to o} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \text{எல்லை}_{\Delta u \to o} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \text{எல்லை}_{\Delta x \to o} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ எனப் பெறப்படும். இது ஓர் முக்கிய வாய்பாடு. இந்த உண்மையை மேலும் விரிவு படுத்தலாம். அதற்குரிய கிளைத் தேற்றம் (1).

$y = f(u)$; $u = F(v)$; $v = \Psi(w)$; $w = \emptyset(x)$ என நான்கு படிகளில் y என்பது x இன் சார்பெனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$ என்பது தேற்றம்.

முன் பத்தியில் கண்டபடி

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x}$ எனக் கொள்ளலாம்.

இரு பக்கங்களுக்கும் $\Delta x \to 0$ என்ற நிலையில் எல்லை காண,

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$ எனப் பெறப்படும்.

இங்கு நாம் கவனிக்க வேண்டியது யாதெனில்

Δx என்ற x இன் ஏற்றத்திற்கு Δw என்பது w இன் ஏற்றம் ;

Δw என்ற w இன் ஏற்றத்திற்கு Δv என்பது v இன் ஏற்றம் ;

Δv என்ற v இன் ஏற்றத்திற்கு Δu என்பது u இன் ஏற்றம்;

Δu என்ற u இன் ஏற்றத்திற்கு Δy என்பது y இன் ஏற்றமாகும்.

எனவே x இல் Δx என்ற ஏற்றம் ஏற்படும்போது 4 படிகளில் y இல் Δy என்ற ஏற்றம் ஏற்படுகிறது. $\Delta x \to 0$ ஆகும் போது, Δu, Δv, Δw, Δy யாவும் படிப்படியாக $\to 0$ ஆகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு :

$y = \{\sqrt{\sec(ax^3 + b)}\}^n$

$y = u^n$; $u = \sqrt{v}$; $v = \sec w$; $w = ax^3 + b$.

கிளைத் தேற்றம் 2 : $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$

தெரிப்பு :

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ என நாம் கண்டோம்.

இங்கு $y = x$ என நாம் கொண்டால்,

$\frac{dy}{dx} = 1.$

$\therefore \quad 1 = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\because \; y = x, \; \frac{dy}{du} = \frac{dx}{du}$ என்பது உண்மை.

$$\therefore \; 1 = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \; \frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}} .$$

$u = f(x)$ என்பதற்குப் பதிலாக, $y = f(x)$ எனக் கொண்டால் $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ எனப் பெறப்படும்.

அல்லது

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$ என்பது வெளிப்படை.

$\Delta x \to o$ என்னும்போது $\Delta y \to o$. மறுதலையாக $\Delta y \to o$ என்னும் போது $\Delta x \to o$.

$$\therefore \; \underset{\Delta x \to o}{\text{எல்லை}} \; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} .$$

$$\underset{\Delta y \to o}{\text{எல்லை}} \; \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$$

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1$$

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

இம்முறையிலும் முன்கூறிய கிளைத் தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

3.42 சார்பின் சார்புகள்—வகைக்கெழு:

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) $y = \sin (ax+b)$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ என்ன ?

$y = \sin u$; $u = ax+b$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u . \; a$$

$$= a \cos (ax+b).$$

(2) $y = \cos^m x$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ என்ன?

$y = u^m$; $u = \cos x$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= mu^{m-1} (-\sin x)$$

$$= -m \sin x \cos^{m-1} x.$$

(3) $y = \sin^3 (3x^2+1)$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ என்ன?

$y = u^3$; $u = \sin v$; $v = 3x^2+1$ எனக் கொள்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= 3u^2 . \cos v . 6x$$

$$= 18x . \sin^2 v . \cos (3x^2+1)$$

$$= 18x . \sin^2 (3x^2+1) \cos (3x^2+1).$$

(4) $y = \tan \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} \right)$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ என்ன?

$y = \tan u$; $u = \sqrt{v}$; $v = \frac{x}{x+1}$

முதலில் $\frac{dv}{dx}$ ஐக் காண்போம்.

வகுத்தல் வாய்பாடு படி, $\frac{dv}{dx} = \frac{(x+1) . 1 - x . 1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$u = v^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{2} v^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$y = \tan u$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{du} = \sec^2 u.$$

எனவே

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$=\sec^2 u.\ \frac{1}{2\sqrt{v}}.\ \frac{1}{(x+1)^2}$$

இப்போது u, v என்பவற்றிற்கு x ஒட்டிய மதிப்புகளை ஈடு செய்க.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\sec^2\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right).\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}.\ \frac{1}{(x+1)^2}\sec^2\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$$

(5) $x=a\sin y$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

இங்கு x ஐ சார்புடை மாறி எனவும், y ஐ சார்பில் மாறி யெனவும் கொண்டால்,

$\frac{dx}{dy}=a\cos y$ என்பது தெளிவு.

ஆனால் $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a\cos y}$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\ \left(\because\ \frac{x}{a}=\sin y\right)$$

$$=\frac{a}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

3.5 மறைமுகச் சார்புகள் (Implicit functions)—வகைக் கெழு காணல் :

இதுவரை $y = f(x)$ என்ற வகையில் y என்பது x இன் வெளிப்படை சார்பாக (Explicit function) இருக்கும்போது $\frac{dy}{dx}$ கண்டோம். அப்படியின்றி $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற வகையில் y யும் x உம் தொடர்பு பெற்று x இன் மாறுதல்களைச் சார்ந்த வகையில் y இன் மதிப்புக்கள் மாறுமானல், இவை மறைமுகச் சார்புகளெனப்படும். (உட்படு சார்புகளெனவும் கூறுவது மரபு).

$x^3+y^3=a^3$ என்பது ஓர் மறைமுகச் சார்பு. ஆனல் இதையே $y=\sqrt[3]{a^3-x^3}$ என்ற நேர்முகச் சார்பாகவும் காணலாம். ஆனல் $x+\sin y = \sin xy$ என்ற வகையில் x உம் y யும் தொடர்பு பெறின், இது ஒரு மறைமுகச் சார்பாகவேதானிருக்க முடியும்.

x இன் வெளிப்படைச் சார்பாக $y = F(x)$ என்ற வகையில் இதைக் காண இயலாது. எனவே பொதுவாக மறைமுகச் சார்புகளில்

(1) x உம், y யும் ஒரு தொடர்பு பெற்றிருக்கும் ;

(2) சில சமயங்களில் y ஐ, x இன் வெளிப் படைச் சார்பாகக் காண இயலும் ;

(3) சில சமயங்களில் y ஐ x இன் வெளிப்படைச் சார்பாகக் காணவே இயலாது.

(4) மற்றும் சில சமயங்களில் y ஐ x இன் நேர்முகச் சார்பாகப் பெறும் முயற்சி ஒரு சிக்கலான நேர்முகச் சார்புக்கு நம்மைக் கொண்டு விடும்.

இதற்கு எடுத்துக்காட்டாக,

$ax^2+2hxy+by^2=0$ எனக் கொண்டால்

$$y = \frac{-hx \pm \sqrt{h^2x^2-abx^2}}{b}$$

$$= \frac{x\,[-h \pm \sqrt{h^2-ab}\,]}{b}$$ என்ற இரு மதிப்புடைய நேர்முகச் சார்பு பெறப்படும்.

இதற்குப் பதிலாக

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற சார்பு கொடுக்கப் பட்டால், yஐ, x இன் வெளிப்படைச் சார்பாகப் பெறுவது இயலாது.

இவ்விதமான மறைமுகச் சார்புகள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றைக் கொண்டு வெளிப்படைச் சார்பு காணாமலேயே $\frac{dy}{dx}$ காணும் முறையைப் பார்ப்போம்.

மறைமுகச் சார்புகள் பொதுவாக $F(x, y) = 0$ என்ற அமைப்பில் கொடுக்கப்படும்.

இந்த அமைப்பில் ஒவ்வொரு உறுப்பாக எடுத்து அதன் x ஒட்டிய வகைக் கெழு கண்டு, உரிய கூட்டு குறைக் குறி களையிட்டு, $\frac{dy}{dx}$ இல் ஒரு சமன்பாடு கண்டு, அதற்குப் பின்பு $\frac{dy}{dx}$ காண வேண்டும். அப்படிப் பெறப்படும் $\frac{dy}{dx}$ என்ற மதிப்பில், x, y இரண்டும் கலந்திருக்கக் கூடும்.

பின் கொடுக்கப்படும் எடுத்துக்காட்டுகள், மறைமுகச் சார்புகளில் வகைக் கெழு காணும் முறையை விளக்கும். அதற்கு முன்பாக, சில விளக்கங்கள் இப்போது கூறி மேற் செல்வோம்.

y என்பதின் x ஒட்டிய வகைக் கெழு $\frac{dy}{dx}$

y^2 என்பதின் x ஒட்டிய வகைக் கெழு $2y\frac{dy}{dx}$ எனப் பெறப் படும்.

எப்படியெனில் $u = y^2$ எனக் ககாண்டால்

$$\frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(y^2) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ என்ற வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தி $\frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$ என்ற அமைப்பில் y^2 என்பதின் x ஒட்

டிய வகைக் கெழு பெறப்படும். இவ்வாறே y^n இன் x ஒட்டிய வகைக் கெழு $ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$ எனப் பெறப்படும்.

xy இன் x ஒட்டிய வகைக் கெழு

$y+x\frac{dy}{dx}$ என (பெருக்கல் வாய்பாடு படி) பெறப்படும்.

$\sin y$ இன் x ஒட்டிய வகைக் கெழு

$\cos y\frac{dy}{dx}$ எனப் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

(1) $ax^2+2hxy+by^2=0$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ என்ன ?

இடது பக்கமுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பின் x ஒட்டிய வகைக் கெழு காண்க.

அதாவது

$$\frac{d}{dx}\left[ax^2+2hxy+by^2\right]=0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(ax^2)+\frac{d}{dx}(2hxy)+\frac{d}{dx}(by^2)=0.$$

$$\therefore \quad 2ax+2h\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+b.\ 2y\frac{dy}{dx}=0.$$

இதை

$2\frac{dy}{dx}\left[hx+by\right]=-2(ax+hy)$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{ax+hy}{hx+by}\right)$$

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=c$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]+\frac{d}{dx}\left[\sqrt{y}\right]=0$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

(3) $x^2+y^2 = a^2$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக் கெழு காண,

$$\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2] = \frac{d}{dx}[a^2] = 0$$ [ஏனெனில் a^2 ஒரு மாறிலி]

$$\therefore \quad 2x+2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(4) $y^2 = 4ax$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக் கெழு காண,

$$\frac{d}{dx}[y^2] = \frac{d}{dx}[4ax]$$

$$\therefore \quad 2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}.$$

(5) $y^2 = \sin x + \cos y$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக் கெழு காண,

$$\frac{d}{dx}[y^2] = \frac{d}{dx}[\sin x] + \frac{d}{dx}[\cos y]$$

$$\therefore \quad 2y\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin y\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}[2y+\sin y] = \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{(2y+\sin y)}.$$

3·6 x உம் y யும் வேறோர் மாறிலியால் தொடர்பு படுத்தல்.

$x=f(t)$; $y=F(t)$ என்று y, x இரண்டையும் t என்னும் சாராமாறி (parameter) யால் தொடர்பு படுத்தினால் y என்பது x இன் சார்பு எனக் கூறலாம். ஏனெனில் $x=f(t)$; $y=F(t)$ என்ற இரு சமன்பாடுகளிடையே t நீக்கப்பட்டால் x, y க்குள்ள ஒரு தொடர்பு அல்லது சார்பு கிடைக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, (1) $x=at^2$; $y=2at$ எனக் கொண்டால் $x=a\left(\frac{y}{2a}\right)^2$ என்ற தொடர்பு, அதாவது $y^2=4ax$ என்ற சார்பு கிடைக்கும்.

(2) $x=a\cos t$; $y=a\sin t$ எனக் கொண்டால் $x^2+y^2=a^2$ என்ற தொடர்பு அல்லது சார்பு கிடைக்கும்.

(3) $x=t^3$; $y=t^2+t$ எனக் கொண்டால், $y=(x)^{\frac{2}{3}}+(x)^{\frac{1}{3}}$ என்ற சார்பு கிடைக்கும். ஆனால் எப்போதுமே t ஐ நீக்கி x க்கும் y க்கும் உள்ள தொடர்பை ஒரு சாதாரண சார்பாக நேரடியாகப் பெறலாமெனக் கூற முடியாது. ஆனாலும் y என்பது x இன் சார்பேயாகும். அல்லது y யும் x உம் ஒரு மறைமுகச் சார்பால் தொடர்பு படுத்தப் படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$y=\sin t+\cos t^2$; $x=\log t+t^3$ என்று கொடுக்கப்பட்டால் x ஐயும், y ஐயும் நேரடியாக இணைக்கும் ஒரு வெளிப்படு சார்பையோ, மறைமுகச் சார்பையோ பெறுவது எளிதல்ல. அப்படியிருப்பினும் t இன் மூலம் y என்பது x இன் சார்பாகும். இப்படிப்பட்ட சார்புகளுக்கான வகைக்கெழுவான $\frac{dy}{dx}$ காணும் முறையைக் காண்போம்.

3·61 $x=f(t)$; $y=F(t)$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ காணும் முறை.

வாய்பாடு : $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

t இல் Δt என்ற ஒரு சிறு ஏற்றம் ஏற்படும்போது t இன் சார்பான x இல் Δx என்ற ஒரு சிறு ஏற்றமும், t இன் சார்பான y இல் Δy என்ற ஒரு சிறு ஏற்றமும் ஏற்படும்.

$\Delta t \to 0$ என்னும்போது, Δx, Δy இரண்டும் பூச்சியத்தை நெருங்கும்.

$\therefore$ வரையறைப்படி, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$;

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}.$$

இப்போது $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$ என எழுதலாம்.

எனவே $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$= \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$ ஆகும்.

3.62 எடுத்துக்காட்டு :

(1) $x = at^3$; $y = bt^2$ ஆனால் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

$= \frac{2bt}{3at^2} = \frac{2b}{3at}$ ஆகும்.

இப்போது y ஐயும், x ஐயும் நேராகத் தொடர்பு படுத்தி $\frac{dy}{dx}$ காண்போம்.

$$y = bt^2$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{y}{b}$$

$$x = at^3$$

$$\therefore \quad t^3 = \frac{x}{a}.$$

$(t^3)^2 = t^6 = (t^2)^3$ என்பது தெளிவு.

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^3}{b^3}$$

எனவே இரு பக்கங்களுக்கு x ஒட்டிய வகைக் கெழு காண,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{a^2}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{y^3}{b^3}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{a^2} = \frac{3y^2}{b^3}\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x \ b^3}{3a^2 \ y^2}$$ எனக் காணலாம்.

ஆனல் $\frac{2x \ b^3}{3a^2 y^2} = \frac{2b^3 \ at^2}{3a^2 \ b^2 \ t^4}$

$= \frac{2b}{3at}$ என்ற மதிப்பே வருவது காண்க.

ஆனல் இம் முறைப்படி, அதாவது y ஐயும் x ஐயும் நேரடியாகத் தொடர்பு படுத்தும் சார்பினைக் கண்டு $\frac{dy}{dx}$ காண வேண்டுமென்ற தேவையில்லை.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$ என்ற வாய்பாடு கொண்டே, $\frac{dy}{dx}$ காணலாம்.

பயிற்சி 3·3

I. பின்வருவனவற்றில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க (வாய்பாடு கொண்டு)

1. $y = x^4 + x^2$
2. $y = cx^3 + ax^2 + bx$
3. $y = (x+4)^3$
4. $y = (2x+1)^3$
5. $y = (3-2x)^n$
6. $y = \cos(ax+b)$
7. $y = \tan(2\pi x)$

8. $y = \cos 3x \cos x$

9. $y = \sin ax \cos bx$

10. $y = \sin^5 x$

11. $y = \cos^4 ax$

12. $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$

13. $y = (2-3x-5x^2)$

14. $y = \cos x^\circ$ (x பாகை அளவில்)

15. $y = \cos^3 2x$

16. $y = \sin^3 ax \cos x$

17. $y = \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$

18. $y = (x+a)^3 (b-2x)^2$

19. $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x+3}$

20. $y = (1-x^2)^5$.

II. பின்வரும் உட்சார்புகளுக்குரிய $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

1. $xy = k$

2. $x^2+3xy+5y^2=4$

3. $\cos ax+\sin by=0$

4. $\tan x+\sec y=3$

5: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=36$

III. பின் வருவனவற்றிற்கு $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

(1) $x=2at^3$; $y=2at$

(2) $x=(2t-1)$; $y=(3t-2)$

(3) $x=t^3$; $y=4-t^2$

(4) $x=a\,(t+\sin t)$

$y=a\,(1-\cos t)$

(5) $x=a\cos^3\theta$

$y=a\sin^3\theta$

3.7 **தொடர்ச்சியாக வகைக் கெழு காணல்** (successive differentiation) :

y என்பது x இன் சார்பாகக் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் போது, அதன் வகைக் கெழுவான $\frac{dy}{dx}$ என்பதும் பொதுவாக ஒரு x இன் சார்பாக விருக்கும்.

$\frac{dy}{dx}$ எனப் பெறப்படும் வகைக் கெழுவினுக்கு மறுபடியும் ஒரு முறை வகைக் கெழு காணலாம். அப்படி $\frac{dy}{dx}$-க்கு ஒட்டிய வகைக் கெழுவினை $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ எனக் குறியீடு செய்யலாம். இதனை y க்கு x ஒட்டிய இரண்டாம் வகைக் கெழு எனக் கூறுகிறோம்.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$ என எழுதுவது மரபு.

முன்னர்.........2.2 இல் கூறியபடி, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஒரு குறியீடு; d^2, y, d, x^2 என்பவற்றிற்குத் தனித் தனிப் பொருளோ, d^2y மேலெண் என்றோ, dx^2 கீழெண் என்றோ எதுவுமில்லை. அது y என்ற சார்புக்கு x ஒட்டிய இரண்டாவது வகைக் கெழு எனப் பொருள். அவ்வாறே $\frac{d^2y}{dx^2}$ க்கு மறுபடியும் ஒரு முறை x ஒட்டிய வகைக் கெழு கண்டால், அது மூன்றாவது வகைக் கெழு எனப்படும்; அதன் குறியீடு $\frac{d^3y}{dx^3}$. அவ்வாறே $\frac{d^ny}{dx^n}$ என்பது y என்னும் சார்புக்கு n முறை தொடர்ச்சியாக வகைக் கெழு கண்டு வரும் மதிப்பு எனப்படும்.

$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... $\frac{d^ny}{dx^n}$ என்பவற்றை முறையே D^2y, D^3y, ...D^ny என எழுதுவதுமுண்டு. இங்கு D க்கு உரிய 'படி'

(power), வகைக் கெழு தொடர்ச்சியாக எத்தனை முறை காணப் படுகிறது என்பதை மட்டுமே குறிக்கும். அது 'படி' என நாம் இயற்கணிதத்தில் அறிந்த பொருளில் இங்கு பயன்படுத் தப் படுவதில்லை.

$y=f(x)$ எனக் கொண்டால், $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$...... $f^n(x)$ என்பவை முறையே x ஒட்டிய முதல் இரண்டாம், மூன்றும்,......... n ஆம் வகைக் கெழுக்களைக் குறிப்பிடுவதாக வும் எழுதுவதுண்டு. அவ்வாறே, y_1, y_2, y_3,............y_n எனவும் அவற்றினைக் குறியீடுகளால் காட்டுவதும் வழக்கிலுள்ளது.

சில சார்புகளுக்கு, எத்தனை அளவு வகைக் கெழுக்களையும் காணலாம்; சிலவற்றிற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்கு மேல் வகைக் கெழுக்கள் பூச்சியமாகி விடும்.

முதல் வகை: $y=\sin x$

$$Dy=\cos x$$
$$D^2y=-\sin x$$
$$D^3y=-\cos x \;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots$$

என்று போய்க் கொண்டே இருக்கலாம்.

இரண்டாம் வகை: $y=x^4$

$$Dy=4x^3$$
$$D^2y=12x^2$$
$$D^3y=24x$$
$$D^4y=24$$
$$D^5y=0=D^6y=\ldots\ldots$$

இங்கு நான்காம் வகைக் கெழு ஒரு மாறிலி; அதற்கு மேற்பட்ட வகைக் கெழுக்கள் பூச்சியமாவதைக் காண்க.

எடுத்துகாட்டு:

(1) $y=A\cos x+B\sin x$ ஆனல் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ என்ன?

$$\frac{dy}{dx}=-A\sin x+B\cos x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-A\cos x-B\sin x$$
$$=-y \text{ என்பது தெளிவு.}$$

எனவே இங்கு $y+\frac{d^2y}{dx^2}=0$ என்கிற தொடர்பு காணப்படுகிறது.

(2) $y=x^n$ (n கூட்டு முழு எண்)

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)\ x^{n-2}$$

$r<n$ ஆனால்

$$\frac{d^ry}{dx^r} = n\ (n-1)\ (n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)\ x^{n-r})$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \underline{|n} \text{ (மாறிலி)}$$

அதற்கு மேற்பட்ட வகைக் கெழுக்கள் பூச்சியமாகின்றன.

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக மட்டும் இல்லாமல் இருக்குமானால், எந்த அளவுக்கு வேண்டுமானாலும் வகைக் கெழு கணக்கிட்டுக் கொண்டே போகலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$y=\frac{1}{x}$ எனக் கொள்க.

$$y= x^{-1}$$

$$Dy= -1\ x^{-2}$$

$$D^2 y=(-1)\ (-2)\ x^{-3}$$

$$D^3 y= (-1)\ (-2)\ (-3)\ x^{-4}$$

... ...

$$D^r y= (-1)\ (-2)(-3)\ldots\ldots\ldots(-r)x^{-(r+1)}$$

$$=\frac{(-1)^r\ \underline{|r}}{x^{r+1}}$$ என்ற வாய்பாடு கிடைக்கும்.

(4) $xy=ax^2+b$ ஆனால்

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0$ என நிறுவுக.

$$xy=ax^2+b$$

$$\therefore \quad y = \frac{ax^2+b}{x} = ax + \frac{b}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = a - \frac{b}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2b}{x^3}$$

$$\therefore \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x^2\left(\frac{2b}{x^3}\right) + x\left(a - \frac{b}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2b}{x} + ax - \frac{b}{x}$$

$$= ax + \frac{b}{x}$$

$$= y$$

$\therefore \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$ எனப் பெறப்படும்.

மற்றோர் முறை :

$$xy = ax^2 + b$$

இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக் கெழு காண,

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2ax \quad \text{---}(A)$$

இதற்கு மறுபடியும் x ஒட்டிய வகைக் கெழு காண,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2a$$

$$\therefore \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2a - \frac{dy}{dx}.$$

இரு பக்கங்களையும் x ஆல் பெருக்க,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 2ax - x\frac{dy}{dx}$$

$= y$ [(A) காண்க]

$$\therefore \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

பயிற்சி 3.4

(1) $y=ax^2+bx+c$ ஆனால்

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=2c$$ என நிறுவுக.

(2) $y=ax^3+bx^2$ ஆனால்

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=0$$ என நிறுவுக.

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(3) $y=ax^n+bx^{n-1}$ ஆனால் $(n>2)$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2(n-1)x\frac{dy}{dx}+n(n-1)y=0$$

(4) $y=3\cos 2x+5\sin 2x$ ஆனால்

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0.$$

(5) $y=A\cos 3x+B\sin 3x$ ஆனால்

$$\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0.$$

(6) $y=A\cos mx+B\sin mx$ ஆனால்

$$\frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=0.$$

(7) $y=x+b\sin x$ ஆனால்

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=x$$

(8) $y=ax+b\sin mx$ ஆனால்

$$\frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=m^2ax$$

(9) $y=x\sin 2x$ ஆனால்

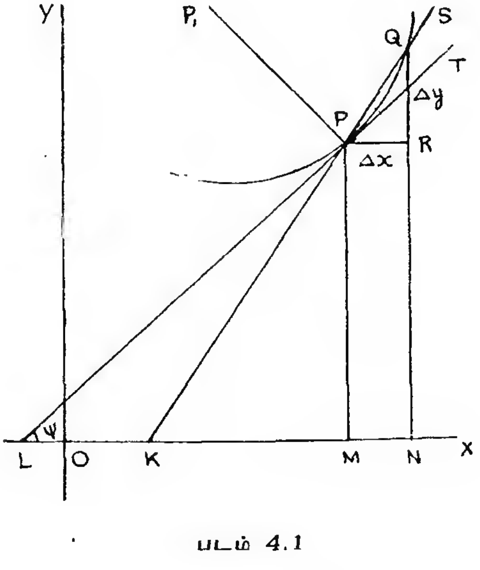
$$x^2y_2-2xy_1+2(2x^2+1)y=0$$

(10) $y=\frac{1}{x}$ ஆனால்

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=3y$$

IV A. வகைக் கெழு-வடிவ கணிதப் பொருள்

(Differential Coefficient-Geometrical Meaning)



படம் 4.1

படம் 4.1-இல் $y=f(x)$ என்ற சார்பின் கோட்டுருவப் படம் வரையப்பட்டிருக்கிறது.

$P(x,y)$ஐயும், $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ஐயும் குறிக்கட்டும்.

PQ-ஐ ஒரு நாணுக இணைக்க.

P, Q இலிருந்து முறையே PM, QN என OXக்குக் குத்துக் கோடுகள் வரைந்து, $PR \parallel OX$ வரைா. அப்போது $PR = \Delta x$ எனவும் $PQ = \Delta y$ எனவும் அளவு பெற்றதாகும்.

Δx இன் மதிப்பு பூச்சியத்தை நெருங்கும்போது,

(1) $\Delta y \to 0$

(2) $Q \to P$.

(3) PQ என்பது PT என்ற தொடு வரையாக நெருங்குகிறது.

(4) $\angle SPT$ இன் மதிப்பு$\to 0$.

(5) எனவே $\angle RPQ \to \angle RPT$.

அதாவது நாண் PQ இடஞ்சுழியாக x அச்சிற்கு (Positive direction of the x-axis) சாய்ந்திருக்கும் கோணமானது தொடுவரை PT ஆனது இடஞ்சுழியாக x அச்சிற்கு சாய்ந்திருக்கும் கோண அளவிற்கு நெருங்குகிறது.

இனி, இந்நூலில் இடஞ்சுழியாக x அச்சிற்கு சாய்ந்திருக்கும் கோணம் என்று கூறுவதற்குப் பதிலாக, 'சாய்வுக் கோணம்' என்று மட்டுமே கூறப்படும். அதற்குரிய பொருள் இதுவெனக் கொள்க.

$$\therefore \Delta x \to 0 \text{ என்ற நிலையில் } \lim_{\Delta x \to 0} \tan RPQ = \tan RPT$$

$$= \tan TLX \text{ (படம் 4·1)}$$

$$= \tan \Psi.$$

$$\text{ஆனால் } \lim_{\Delta x \to 0} \tan RPQ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{QR}{PR}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

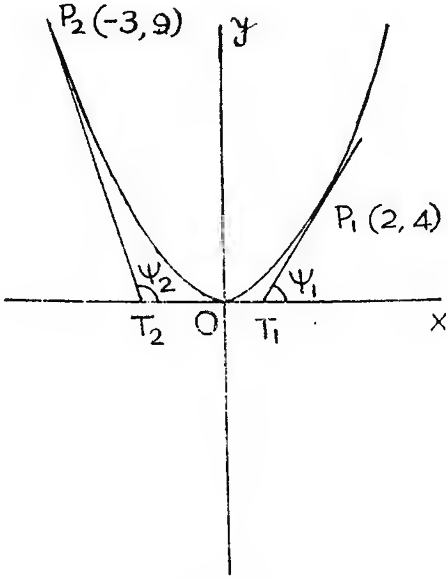
$$= \frac{dy}{dx}.$$

எனவே $P(x, y)$ என்ற இடத்தில் $y = f(x)$க்குரிய $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு, அப்புள்ளியில் $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு வரையப்படும் தொடுவரை x அச்சோடு பெற்ற சாய்வுக்கோணத்தின் இருக்கை (tangent என்ற கோணகணிதத் தகவு)

அதாவது, அவ்வளைவரைக்கு $P(x, y)$ என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுவரையின் சாய்வுக் கோணம் Ψ எனக் கொண்டால், (x, y) என்ற இடத்திற்குரிய $\frac{dy}{dx} = \tan \Psi$.

$\tan \Psi$ என்பது (x, y) என்ற இடத்தில் அத்தொடுவரையின் சரிவு (gradient) எனப்படும். அதுவே (x, y) என்ற இடத்தில் அவ்வளைவரையின் சரிவு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

4·11 எடுத்துக்காட்டு



படம் 4.2

$y = x^2$ என்ற பரவளையத்திற்கு, பொதுவாக, $\frac{dy}{dx} = 2x$.

P_1 (2,4) என்ற இடத்தில் P_1T_1 என்ற தொடுவரையும் P_2 (−3,9) என்ற இடத்தில் P_2T_2 என்ற தொடுவரையும் வரையப்பட்டிருக்கின்றன. P_1T_1 இன் சாய்வுக்கோணம்,

$\Psi_1 = \angle P_1T_1X$. P_2T_2, இன் சாய்வுக் கோணம் $\Psi_2 = \angle P_2T_2X$. (2, 4) என்ற இடத்தில் அப்பரவளையத்தின் சரிவு $\tan \Psi_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x = 2 \times 2 = 4$.

அவ்வாறே (—3,9) என்ற இடத்தில் அப்பரவளையத்தின் சரிவு

$$=\tan \Psi_2 = \frac{dy}{dx} = 2x = 2\times -3 = -6.$$

ஆகவே, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி (x, y) இல் ஒரு வளைவரையின் சரிவு, அவ்விடத்தில் அவ்வளைவரைக்கு வரையப் படும் தொடுவரையின் சரிவுக்குச் சமம் என்பது வரையறை.

4.13 மற்றும் சில எடுத்துக் காட்டுகள்:—

(1) பொதுவாக, (x, y)என்ற புள்ளியில், $y=2x^3$ என்ற வளைவரைக்குச் சரிவு $\frac{dy}{dx}=6x^2$.

(1, 2) என்ற இடத்தில் சரிவு=6 $(1)^2=6$. (—4, —128) என்ற இடத்தில் ச்ரிவு$=2(-4)^2=32$. (0, 0) என்ற ஆய ஆதியில் சரிவு=0; அதாவது (0, 0) என்ற புள்ளியில், அவ் வளைவரைக்குரிய தொடுவரையின் சரிவு=0; அதாவது அங்கே தொடுவரை x அச்சோடு பெறும் சாய்வுக்கோணம் $\Psi=0$; எனவே (0, 0) இல் உள்ள தொடுவரை x அச்சுக்கு ஒரு போகான ஒரு நேர்கோடாகும் என்று தெரிகிறது; இங்கு அது சிறப்பாக x அச்சுடன் இணைந்து விடுகிறது காணலாம்.

(2) $y=\sin x$ என்ற வளைவரைக்குரிய சரிவு பொதுவாக $\frac{dy}{dx}=\cos x$. ஆகவே $x=0$, $y=0$ என்ற இடத்தில் வளைவரைச் சரிவு $=\cos 0=1$.

எனவே அங்குள்ள தொடுவரை x அச்சுக்கு $\frac{\pi}{4}$ $(=45°)$ சாய்ந்திருக்கும்; ஏனெனில் $\tan\frac{\pi}{4}=1$.

$x=\frac{\pi}{4}, y=1$ என்ற இடத்தில் வளைவரை சரிவு $=\cos\frac{\pi}{2}=0$. எனவே அங்குள்ள தொடுவரை x அச்சுக்கு ஒரு போகான நேர்க்கோடாக விருக்கும்.

எனவே, $y=\sin x$ என்ற வளைவரையை $x=8\pi$ வரையில் வரைந்து பார்த்தால் (0, 0), $(2\pi; 0)$ $(4\pi, 0)$, $(6\pi, 0)$, $(8\pi, 0)$ என்ற இடங்களில் தொடுவரைகளின் சரிவுகள் முறையே

cos 0, cos 2π, cos 4π, cos 6π, cos 8π எனவாகும்; அதாவது அப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுவரைகள் x அச்சுக்கு $\frac{\pi}{4}$ அளவு சாய்ந்திருக்கும்.

பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ள உண்மைகளைப் புரிந்து கொள்க.

$y = \sin x$

இடம் அல்லது புள்ளி	வளைவரைச் சரிவு cos x	தொடுவரைக்கும் x அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம்
$\left[\frac{\pi}{2}, 1\right]$ $\left[\frac{3\pi}{2}, -1\right]$ $\left[\frac{5\pi}{2}, 1\right]$ $\left[\frac{7\pi}{2}, -1\right]$	0 பூச்சியம்	x அச்சுக்கு ஒரு போகுக் கோடுகள் அல்லது இணை கோடுகள்
(π, 0) (3π, 0) (5π, 0) (7π, 0)	−1	x அச்சுக்கு $\frac{3\pi}{4}$ (=135°) சாய்ந் திருக்கும்
(0, 0), (2π, 0) (4π, 0, (6π, 0)	1	x அச்சுக்கு $\frac{\pi}{4}$ (=45°) சாய்ந் திருக்கும்

பயிற்சி;

$y = \sin x$ என்ற வளைவரை வரைந்து இவற்றினைச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

(3) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$ என்ற வளைவரைக்குப் பொதுவாக (x, y) என்ற புள்ளியில் சாய்வு $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x - 1$.

பின்வரும் அட்டவணையில் காணும் உண்மைகளைப் புரிந்து கொள்க :

x	0	1	-1	2	-2	3	–	4
$y=x^3-3x^2-9x+12$	12	1	17	-10	10	-15	-15	-8
சரிவு $\frac{dy}{dx}=3x^2-6x-9$	-9	-12	0	-9	15	0	36	15

$(3, -15)$ என்ற புள்ளியிலும் $(-1, 17$ என்ற புள்ளியிலும் $\frac{dy}{dx}=\tan$ (சாய்வுக் கோணம்) $=0$. எனவே அந்த புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுவரைகள், x அச்சிற்கு ஒரு போகாக அமைவதைக் கோட்டுருவப் படம் வரைந்து கண்டு கொள்க.

ஒரு வளைவரை $y=f(x)$க்கு (x_1, y_1) என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் வரையக்கூடிய தொடுவரையின் சமன்பாடு : [Equation to the tangent at x_1, y_1].

படம் 4·1 இல் P என்பது $y=f(x)$ என்ற வளைவரையின் மேலுள்ள (x_1, y_1) என்ற புள்ளியெனக் கொள்வோம்.

அங்கு தொடுவரையின் சரிவு, அப்புள்ளிக்குரிய (அதாவது $(x_1, y_1$ க்குரிய) $\frac{dy}{dx}$ ஆகும் என நாம் 4·1 இல் கண்டோம்.

அத் தொடுவரை (x_1, y_1) வழியாக, அதற்குரிய $\frac{dy}{dx}$ என்ற சரிவுடன் செல்லும் நேர்க்கோடாகும். எனவே, அத் தொடுவரையின் சமன்பாடு (தி. கோ; கொ. மு ; புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல் I பக்கம் 338, 2·52).

$$y-y_1, = (x-x_1)\,\frac{dy}{dx}\ ;\ [x_1, y_1) \text{க்குரிய } \frac{dy}{dx}]$$

4.3 அத்தொடுவரைக்குரிய குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு [Equation to the normal at (x_1, y_1).

ஒரு நேர்க்கோட்டின் சரிவு m ஆனால், அதற்குச் செங்குத்தாக உள்ள எந்த நேர்க்கோட்டிற்கும் சரிவு $=-\frac{1}{m}$ என நாம்

கண்டிருக்கிறோம் [தி. கே ; கொ. மு. இயற்கணிதம் I, பக்கம் 561, 3·3. (ii) : $mm'+1=0$ என்ற கட்டுப்பாடு காண்க]

படம் 4·1 இல் PP_1 என்பது தொடுவரைக்கு (LPT க்கு) P இல் வரையப்படும் குத்துக்கோடு எனக் கொண்டால்,

(1) PP_1 ஒரு நேர்க்கோடு ;

(2) அது (x_1, y_1) வழியாகச் செல்லுகிறது ;

(3) அதன் சரிவு $= -\dfrac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}$

எனவே PP_1 என்ற அக் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y-y_1=-\frac{1}{(dy/dx)_{(x_1, y_1)}}(x-x_1)$$

அல்லது $(x-x_1)+(y-y_1)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}=0.$

எனப் பெறப்படும்.

4.31 எடுத்துக்காட்டு :

(1) $y=x^2$ என்ற வளைவரைக்கு (3, 9) என்ற புள்ளியிலும் (−2, 4) என்ற புள்ளியிலும் வரையப்படும் தொடுவரைகள், குத்துக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$y=x^2$$

போது $\dfrac{dy}{dx}=2x$ (தொடுவரையின் சரிவு)

$\therefore \quad -\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=-\dfrac{1}{2x}$ (குத்துக் கோட்டின் சரிவு)

$(x=3 ;\ y=9)$ இல் $\dfrac{dy}{dx}=2\times3=6.$

$$-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=-\frac{1-}{2\times3}=-\frac{1}{6}.$$

$\therefore$ (3, 9) இல் தொடுவரையின் சமன்பாடு,

$(y-9)=6(x-3).$

அல்லது $6x-y=9.$

குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y-9) = -\frac{1}{6} \quad (x-3).$$

அல்லது $x+6y = 57.$

$(-2, 4)$ இல் $\frac{dy}{dx} = 2\times-2=-4.$

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \tfrac{1}{4}.$$

$\therefore$ $(2, 4)$ இல் தொடுவரையின் சமன்பாடு,

$$(y-4) = -4(x+2)$$

அல்லது $4x+y+4 = 0$

குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y-4) = \tfrac{1}{4}(x+2)$$

$$x-4y+18 = 0.$$

(2) $y=7-6x-x^2$ என்ற வளைவரைக்கு, $(-3, 16)$ என்ற புள்ளியில் வரையக் கூடிய தொடு வரைக்கும், அங்குள்ள குத்துக் கோட்டுக்கும் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$y= 7-6x-x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -6-2x.$$

$(x=-3,\ y=16)$ என்ற புள்ளியில்

$$\frac{dy}{dx} = -6+6=0.$$

எனவே, தொடுவரையின் சமன்பாடு,

$$(y-16) = 0\,(x+3)$$

அதாவது $y=16$ என்ற கோடு x அச்சுக்கு ஒரு போகானது.

அதற்குக் குத்துக் கோடு $x=-3.$

(3) $y=3x+4x^2+5x^3$ என்ற வளைவரைக்கு $(0, 0)$ வழியாக வரையக் கூடிய தொடுவரைக்கும், அங்குள்ள குத்துக்கோட்டுக்கும் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$y=3x+4x^2+5x^3.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)= 3+8x+15x^2.$$

(0, 0) இல் $\frac{dy}{dx} = 3$

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\tfrac{1}{3}.$$

∴ தொடுவரைச் சமன்பாடு,
$y-0 = 3\,(x-0).$

அல்லது $y = 3x$.

குத்துக்கோட்டுக்குச் சமன்பாடு
$y-0 = -\tfrac{1}{3}\,(x-0)$
அல்லது $x+3y = 0$.

(4) $y^2 = 4ax$ என்ற வளைவரைக்கு, $(4a, -4a)$ என்ற புள்ளியில் வரையக் கூடிய தொடுவரைக்கும், குத்துக் கோட்டுக்கும் சமன்பாடுகள் காண்க.

$y^2 = 4ax$ இது ஒரு மறைமுகச் சார்பாகும்.

இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக்கெழு காண,

$$2y\,\frac{dy}{dx} = 4a.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y}.$$

$$= \frac{2a}{y}.$$

∴ $(4a, -4a)$ என்ற புள்ளியில்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{-4a} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 2$$

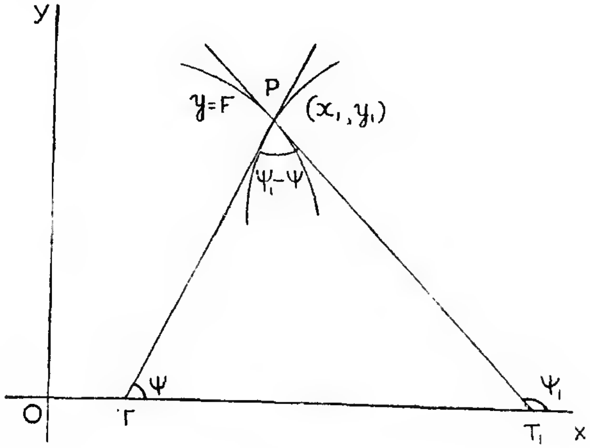
∴ தொடுவரைச் சமன்பாடு,
$(y+4a) = -\tfrac{1}{2}\,(x-4a).$

அல்லது $x+2y+4a = 0$.

குத்துக்கோட்டுச் சமன்பாடு,
$(y+4a) = 2\,(x-4a)$
அல்லது $2x-y = 12a$

4·4 $y = f(x)$, $y = F(x)$ என்ற இரு வளைவரைகளுக்கு மிடைப்பட்ட கோணம் :

வரையறை : இரு வளைவரைகளுக்கிடைப்பட்ட கோண மெனில், அவ்விரு வளைவரைகளும், வெட்டிக்கொள்ளும் (பொதுவான) புள்ளியில், இவ்விரு வளைவரைகளுக்கு வரையப் படும் தொடுகோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணமென்பதாம்.



படம் 4·4

$y = f(x)$ என்ற வளைவரையும், $y = F(x)$ என்ற வளைவரையும் $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும்.

எனவே (x_1, y_1) என்ற புள்ளி $y = f(x)$; $y = F(x)$ என்ற இரு வளைவரைகளுக்கும் பொதுவானதோர் புள்ளி. ஆகவே $y = f(x)$, $y = F(x)$ என்பவற்றை இரு ஒருங்கமைச் சமன்பாடு களாகக் கொண்டால், அவற்றின் தீர்வுகாண x_1, y_1 இன் மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

$y = f(x)$க்கு (x_1, y_1) இல் வரையப்படும் தொடுவரையின் சரிவு $= f'(x)_{(x_1, y_1)}$

அவ்வாறே $F(x)$ க்கு, (x_1, y_1) இல் வரையப்படும் தொடு வரையின் சரிவு $= F'(x)_{(x_1, y_1)}$

படம் 4·4இல், (x_1, y_1)இல் $y = f(x)$க்குரிய தொடுவரை PT_1

$y = F(x)$க்குரிய தொடுவரை PT_1

இவையிரண்டும் Ox (x அச்சு) ஐ, முறையே T, T_1 இல் வெட்டட்டும்.

$\underline{|PTX} = \Psi$ எனவும்,

$\underline{|PT_1X} = \Psi_1$ எனவும்,

$\therefore \underline{|TPT_1} =$ இவ்விரு தொடு வரைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம்,

$= \Psi_1 - \Psi = \theta$ எனக் கொள்க.

$$\tan \Psi = f'(x)$$

$$\tan \Psi_1 = F'(x)$$

$$\therefore \tan \theta = \tan (\Psi_1 - \Psi)$$

$$= \frac{\tan\Psi_1 - \tan \Psi}{1 + \tan \Psi_1 \tan\Psi}$$

$$= \frac{F'(x) - f'(x)}{1 + F'(x) f'(x)}$$

இங்கு $f^1(x)$ — உம், $F'(x)$ உம், $x = x_1$, $y = y$, என்பவற்றிற்கான மதிப்புகளைப் பெறும்.

வரையறை : செங்குத்து வளைவரைகள் (Orthogonal Curves)

இரண்டு வளைவரைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் செங் கோணமாயின் அவ்விரண்டு வளைவரைகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வளைவரைகள் எனப்படும்.

கிளைத்தேற்றம் : இரு வளைவரைகள் $y = f(x)$, $y = F(x)$ செங்குத்து வளைவரைகளானல் வெட்டுமிடத்தில்

$$1 + F'(x) f'(x) = 0$$

முன் தேற்றத்தில் கண்டபடி அவ்விரு வளைவரைகளுக்கு மிடைப்பட்ட கோணம் θ என்பது ஒரு செங்கோணமா கிறது, அதாவது $\theta = 90°$ ஆகிறது.

$\tan 90° = \infty$ என நாமறிவோம்.

எனவே $1 + F'(x) f'(x) = 0$ எனப் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $xy = 12$; $x^2 + y^2 = 25$ என்ற இரு வளைவரைகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் கோணமென்ன ?

முதலில், வெட்டிக்கொள்ளும் இடத்தின் ஆயத்தொலைகள் காணவேண்டும். அதற்கென, இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளாகக்கொண்டு தீர்வுகள் காண வேண்டும்.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$xy = 12$$
$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 49$$
$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 1$$
$$\therefore \quad x + y = \pm 7$$
$$x - y = \pm 1$$

இவைகளைத் தீர்க்க,

x	3	−3	4	−4
y	4	−4	3	−3

என்ற நான்கு வெவ்வேறு தீர்வுகள் பெறப்படும்.

அதாவது வெட்டுமிடங்கள் (3, 4) (−3, −4), (4, 3) (−4, −3) என நான்கு இடங்கள்.

$xy = 12$க்குரிய $\frac{dy}{dx}$ உம்

$x^2 + y^2 = 25$க்குரிய $\frac{dy}{dx}$ உம், ஒவ்வொரு இடத்திற்கும் கண்டு, முன் தேற்றம் 4·4 இல் கண்ட வாய்பாட்டைப் பயன் படுத்தி, வெட்டு கோணங்களைக் காணவேண்டும்.

$$xy = 12$$
$$\therefore \quad y = \frac{12}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{x^2} \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 25$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (2)$$

பின்வரும் அட்டவணையில் அந்நான்கு வெட்டுமிடங்களுக்குமுரிய $\frac{dy}{dx}$ கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் காண்க:

x	3	—3	4	—4
y	4	—4	3	—3
$xy = 12.\ \frac{dr}{dz} = -\frac{12}{z^2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
$x^2 + y^2 = 25.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$

∴ (3, 4) என்ற இடத்தில்

$$\tan\theta_1 = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{1 + 1} = -\frac{7}{24}$$

(−3, −4) என்ற இடத்திலும் $-\frac{7}{24}$

(4, 3) என்ற இடத்தில்

$$\tan\theta_2 = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{1 + 1} = \frac{7}{24}$$

(−4, −3) என்ற இடத்திலும் $\frac{7}{24}$

ஆனால் $\tan\theta_2 = \frac{7}{24}$ என்றால் $\tan(180 - \theta_2) = -\frac{7}{24}$

எனவே θ_1, θ_2 என வெவ்வேறான கோணங்களில் வெட்டிக் கொள்வதாக மேல்தோற்றம் இருந்தாலும், நமக்குக் கிடைப்பது, குறுங்கோணம் α அல்லது அதற்குரிய மிகை நிரப்புக் கோணமான $180—\alpha$.

ஆனால் இரு நேர்க்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும்போது, அவைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தை α என்றோ $180—\alpha$ என்றோ கூறலாம்.

எனவே $xy = 12$; $x^2 + y^2 = 25$ என்ற இரு வளைவரைகளும் நான்கு இடங்களில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. இடைப்பட்ட கோணம் $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)$ அல்லது $180 - \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{7}{24}\right)$

பயிற்சி 4·1

(1) பின்வரும் வளைவரைகளுக்கு குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகளையும், அங்குள்ள குத்துக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

(1) $x = y^2 - 5x + 6$; $(4, 2)$

(2) $xy = 18$; $(6, 3)$

(3) $y = v(a - x)$; $(a, 0)$

(4) $y = x(x-4)$ · $(2, -4)$

(5) $y^2 = 4ax$; $(4a, 4a)$

(6) $y = 2 - 3x + 7x^2 - 5x^3$; (a) $x = \frac{1}{3}$ (b) $x = \frac{3}{5}$.

(7) $y = x^4 - 3x^2$, $(1, -2)$.

(8) $y = 2x^2 - 3x + 5$; $(1, 4)$:

(9) $y = 4\cos 2x - 3\sin\frac{x}{3}$; $x = \frac{\pi}{2}$.

(10) $y = x^2 + 2x^2 + 3x - 8$; $(1, -2)$.

(11) $y = 2\cos x \sin 2x$; $x = \frac{\pi}{3}$.

(2) $y = a - bx + cx^3$ என்ற வளைவரைக்கு, $(0, a)$ என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடுவரையின் சமன்பாடு $3x + \; = 2$; $x = 1$க்குரிய வளைவரைப்புள்ளியில் வரையக்கூடிய குத்துக் கோடு y அச்சுக்கு இணை கோடாயிருக்கிறது. a, b, c காண்க.

(3) $y = 3x^2 + 2x + 5$ என்ற வளைவரை y அச்சை வெட்டு மிடத்தில் வரையக்கூடிய தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க.

(4) $y = \frac{x^3}{3} - x^2$ என்ற வளைவரையின் மேல் எந்தெந்த இடங்களில் வரையப்படும் தொடுவரைகள் x அச்சுக்கு இணை கோடுகளாக இருக்குமெனக் காண்க.

(5) $y=\sin^2 x$ என்ற வளைவரைக்கு $x=\frac{\pi}{4}$ என்ற இடத்தில் வரையக்கூடிய தொடுவரை, குத்துக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க. அவ்விரு கோடுகளும் x அச்சும் சேர்ந்து அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு காண்க.

(6) $y=x(x-1)(x-2)$ என்ற வளைவரை x அச்சை வெட்டுமிடங்களில் வரையப்படும் தொடுவரைகளின் சரிவுகள் என்ன? வளைவரையில் எந்தெந்த இடங்களில் வரையப்படும் தொடுவரைகள் x அச்சுக்கு இணைகோடுகளாயிருக்கும்.

(7) $y=x^2$; $y=x+2$ என்ற இரண்டும் (2, 4) என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன; வெட்டுக்கோணம் என்ன? கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டுக்கு இணைகோடாக, $y=x^2$க்கு உள்ள தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க.

(8) $2y=3x+x^2$: $y^3=2x+3y$ என்ற இரு வளைவரைகளும், ஆயஆதியில் வெட்டிக் கொள்ளும் கோணம் 90° என நிறுவுக.

(9) $y=3+t$; $y=3t^2$ என்ற வளைவரைக்கு $t=1$ என்ற புள்ளிக்குரிய தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க.

(10) $x=at^2$, $y=2at$ என்ற வளைவரைக்கு $t=2$ என்ற புள்ளிக்குரிய தொடுவரையின் சமன்பாடு காண்க.

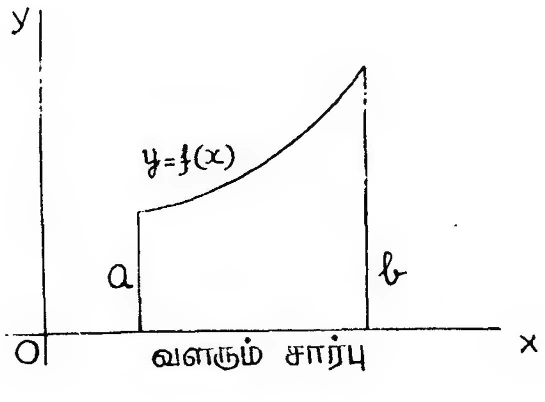
(11) $y^2=x$; $x^2=y$ என்ற வளைவரைகளுக் கிடைப்பட்ட கோணம் என்ன?

(12) $y=2x$ என்ற நேர்க்கோடும் $y^2=x^3$ என்ற வளைவரையும் வெட்டிக்கொள்ளும் ஓரிடம் (4, 8). அவ்விடத்தில் கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டுக்கும், வளைவரையின் தொடுவரைக்குமுள்ள கோணம் காண்க.

B: வளரும் சார்புகள், குறையும் சார்புகள்

(Increasing and Decreasing functions)

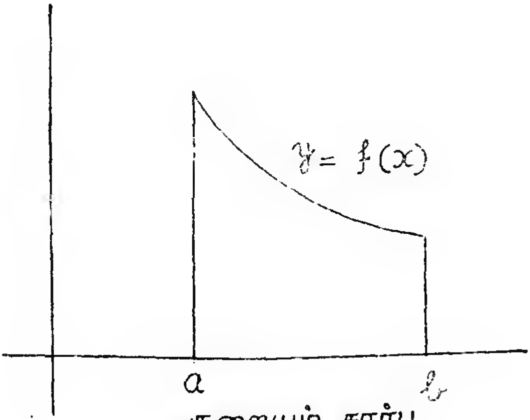
ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் ($a \leq y \leq b$) x வளருங்கால் y இன் மதிப்பு வளர்ந்து, x குறையுங்கால், y இன் மதிப்பு குறைந்து போகும் தன்மைகளைப் பெற்றதோர் சார்பு அவ்விடைவெளியில் வளரும் சார்பெனப்படும், படம் 4·51 காண்க.



படம் 4.51

மாறாக ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் ($a \leq x \leq b$) x வளருங்கால், y இன் மதிப்பு குறைந்து, x குறையுங்கால், y இன்

மதிப்பு வளர்ந்து போகும் தன்மைகளைப் பெற்றதோர் சார்பு அவ்விடைவெளியில் குறையும் சார்பெனப்படும். படம் 4·52 காண்க.



குறையும் சார்பு

படம் 4 52

குறிப்பு : இடைவெளி குறிப்பிடப்பட வேண்டுவது தேவை.

இப்போது வளரும் சார்பின் தன்மையைக் காணலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் x தன் மதிப்புகளை ஏற்கும் போது x இல் ஏற்படும் ஏற்றமான Δx கூட்டு மதிப்புப்பெறின் அதன் காரணமாக yஇன் ஏற்றமான Δyயும் கூட்டுமதிப்புடைத்தாயிருக்கும். xஇல் ஏற்படும் ஏற்றமான Δx குறைமதிப்புப் பெறின், அதன் காரணமாக y இன் ஏற்றமான Δy யும் குறை மதிப்புடைத்தாயிருக்கும்.

சுருங்கக்கூறின்

$a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில் y எந்த மதிப்பை ஏற்றாலும்,

Δx, $+$மதிப்புப் பெறின் அதற்குரிய Δy யும் $+$ மதிப்புப் பெறும் ;

Δx, $-$மதிப்புப் பெறின் அதற்குரிய Δy உம் $-$மதிப்புப் பெறும்.

$$\text{எனவே } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{கூட்டெண்}}{\text{கூட்டெண்}} \text{ அல்லது } \frac{\text{குறையெண்}}{\text{குறையெண்}}$$

$$= \text{கூட்டெண்ணாகும்.}$$

எனவே

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$ இன் மதிப்பு கூட்டெண். இது வளரும் சார்புக்குரிய பண்பு ;

$a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இது பொருத்தமாயிருக்கும் எனவே $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில், $y = f(x)$ என்ற வளரும் சார்பில் x இன் மதிப்பு என்னவாயினும் முதற்கெழு $\frac{dy}{dx}$ கூட்டு மதிப்புடையதாகும். அவ்வாறே, இதே முறையில், ஒரு குறையுஞ் சார்பை யாராய்ந்தால்

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{கூட்டெண்}}{\text{குறையெண்}} \text{ அல்லது } \frac{\text{குறையெண்}}{\text{கூட்டெண்}}$$
$$= \text{குறையெண்}$$

என்றபடி,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$ இன் மதிப்பு குறையெண்ணாகும்.

எனவே $a \leq y \leq b$ என்ற இடைவெளியில், $y = f(x)$ என்ற குறையுஞ் சார்பில், y இன் மதிப்பு என்னவாயினும் $\frac{dy}{dx}$ குறை மதிப்புடையதாகும்,

ஒரே சார்பு $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில் வளரும் சார்பாகவும் $c \leq x \leq d$ என்ற மற்றோர் இடைவெளியில் குறையுஞ் சார்பாகவும் இருக்கலாம். ஒரே சார்பு மாறி மாறி, பல்வேறு இடைவெளிகளில் வளரும்/குறையும் சார்பாகவும் இருக்கலாம். அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளி என்ற கட்டுப்பாடற்று எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் வளரும் சார்பாக அல்லது குறையும் சார்பாக இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(1) $y = x^2$ என்ற சார்பு $x > 0$ க்குரிய மதிப்புகளுக்கு வளரும் சார்பாகவும், $x < 0$ க்குரிய மதிப்புகளுக்கு குறையும் சார்பாக விருப்பதைக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$x>0$ க்கு $2x$ கூட்டு மதிப்பும் $x<0$ க்கு குறை மதிப்பும் பெறுவதைக் காண்க.

$x=0$ க்கு $\frac{dy}{dx} = 2x=0$ ஆகிறதையும் காண்க.

மேலும்

(2) $y=\sin x$ என்ற சார்பானது வளரும்/குறையும் இடைவெளிகளைப் பார்ப்போம்.

$\frac{dy}{dx} = \cos x.$

$\cos x$ இன் மதிப்பு (1) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ கூட்டு மதிப்பு.

(2) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ குறை மதிப்பு.

(3) $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ கூட்டு மதிப்பு.

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $\frac{dy}{dx} = \cos x$ இன் மதிப்பு பூச்சியமாவதையும் காண்க.

எனவே $y=\sin x$ என்ற சார்பு

(1) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில் வளரும் சார்பு.

(2) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில் குறையும் சார்பு.

(3) $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில் வளரும் சார்பு.

இவ்வாறே, மேலும் வளரும் x இன் மதிப்புக்களுக்கு $y=$ மாறி மாறி வளரும்/குறையும் சார்பாவதைக் காண்க.

(3) $y=6x+3x^2+x^3$ என்ற சார்பு x இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒரு வளரும் சார்பென நிறுவலாம். வளரும் சார்பாயின், x இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அதன் முதல் வகைக் கெழு $\frac{dy}{dx}$ கூட்டுக் குறி பெற்றிருக்க வேண்டும்.

$\frac{dy}{dx} = 6+6x+3x^2 = 3(x+1)^2+3.$

$(x+1)^2$ என்பது ஒரு சரியான இருபடியாதலால், x இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $3(x+1)^2$ இன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பாயிருக்கும்.

எனவே வேண்டியது நிறுவப்பட்டது.

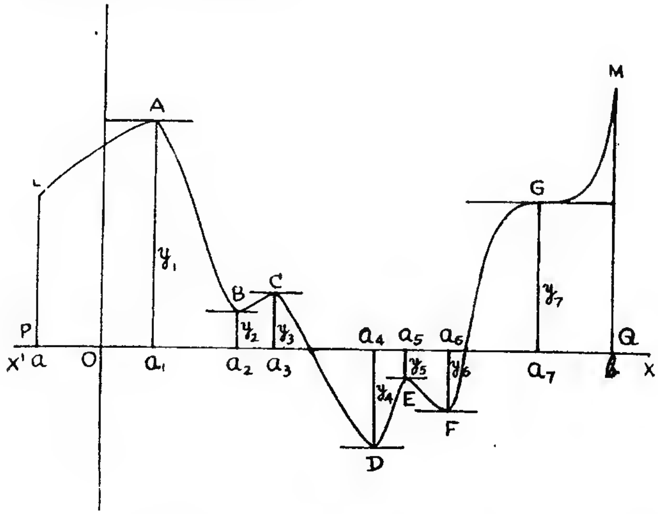
பயிற்சி 4.2

(1) $y=x^3+3x^2+3x+4$ என்ற சார்பு எல்லா மதிப்புகளுக்கும் வளரும் சார்பென நிறுவுக. $x=-1$ என்ற இடத்தில் மட்டில் $\frac{dy}{dx}=0$ எனக் காண்க.

(2) $y=x^3-9x^2+24x+2$ என்ற சார்பு எந்தெந்த இடைவெளிகளில் (1) வளரும் சார்பு (2) குறையும் சார்பு எனக் காண்க.

(3) $y=x^2-6x+12$ என்ற சார்பு எந்தெந்த இடைவெளிகளில் (1) வளரும் சார்பு (2) குறையும் சார்பெனக் காண்க.

4.6 ஒரு சார்பின் மீப்பெரு மதிப்புக்களும் மீச்சிறு மதிப்புக்களும் : (Maximum and Minimum values of a function or Maxima and Minima)



படம் 4.6

$y=f(x)$ என்ற சார்பின் மதிப்புக்கள் x இன் மதிப்பைச் சார்ந்து, மாறுவதை, அதாவது வளர்வதையும் குறைவதையும் அச் சார்பின் கோட்டுருவ படங் கொண்டு ஆராய்வோம்.

[$f(x)$ உம், அதன் முதற்கெழு, $f'(x)$ என்ற சார்பும் $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியான சார்புகள் எனக் கொள்ளப்படும்].

படம் 4·6 இல் $y=f(x)$ என்ற சார்பின் படம் $x=a$ (புள்ளி P) முதல் $x=b$ (புள்ளி Q) வரை வரையப்பட்டிருக்கிறது. அந்தந்த x க்குரிய $y=f(x)$ இன் மதிப்புகள் உரிய நிலைத் தூரங்களால் (ordinate) குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

$x=a_1$; $y=y_1$

$x=a_2$; $y=y_2$

....

$x=a_7$; $y=y_7$.

என்பவை x க்குரிய y இன் மதிப்புக்களைக் காட்டுகின்றன.

$y=f(x)$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களெனின் படத்தில் உள்ள மீப்பெரு, மீச்சிறு நிலைத் தூரங்களாகும். படம் 4·6 இல், வளைவரையை நோக்குங்கால், இடது புறத்திலிருந்து வலது புறமாக, அதாவது x இன் மதிப்பு வளர்ந்து செல்லும் வகையில், L இலிருந்து A வரை, y இன் மதிப்பு வளர்ந்து செல்கிறது; A இலிருந்து B வரை குறைகிறது; B இலிருந்து C வரை வளர்ந்து, C இலிருந்து D வரை குறைந்து, ... செல்வதைப் பார்க்கிறோம்.

சிறப்பாக A என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

A இன் x ஆயத் தொலை a_1 ; அதற்குரிய y மதிப்பு y_1 ; L இலிருந்து A வரை வளரும் அச் சார்பு A இலிருந்து B வரை குறைகிறது ; அதாவது A இல் அதன் 'வளர்ச்சி' நின்று, மாறி 'குறைதல்' தொடங்குகிறது. (At A, the function stops increasing and begins to decrease).

எனவே A என்ற புள்ளிக்கு அருகாமையில், உள்ள எல்லா y மதிப்புக்களையும் விட, y_1 என்பதே மீப்பெரு மதிப்பு ஆகிறது. அம் மீப்பெரு மதிப்பு $x=a_1$ க்கு உரியது. இப்படிப்பட்ட ஒரு மதிப்பு $y=f(x)$ இன் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பெனப்படும். இதையே $y=f(x)$ என்ற சார்பு, $x=a_1$ என்ற மதிப்புக்கு ஒரு மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறதெனக் கூறுவது மரபு.

இப்போது மேலும் வளைவரையை நோக்கின், A இலிருந்து, குறைந்து கொண்டே வரும் y இன் மதிப்பு B இல் தான் 'குறை

வது' நின்று, B இலிருந்து C வரை வளர்ந்து செல்கிறது. B இல் y இன் மதிப்பு y_2 : இது $x=a_2$ என்ற மதிப்பிற்குரியது.

எனவே B என்ற புள்ளிக்கு அருகாமையில் உள்ள எல்லா y மதிப்புகளையும் விட, y_2 என்பதே மீச்சிறு மதிப்பாகிறது. இப்படிப்பட்ட ஒரு மதிப்பு $y=f(x)$ இன் ஒரு மீச்சிறு மதிப் பெனப்படும். இதையே $y=f(x)$ என்ற சார்பு, $x=a_2$ என்ற மதிப்புக்கு, ஒரு மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறதெனக் கூறுவது மரபு.

A என்ற இடத்திலும், B என்ற இடத்திலும் வளைவரை முறையே ஏறுவது நின்று இறங்குவதையும், இறங்குவது நின்று ஏறுவதையும் காண்கிறோம். எனவே இப்புள்ளிகளை, திருப்பப் புள்ளிகள் (Turning points) எனக் கூறுவதுண்டு. அங்குள்ள y இன் மதிப்புக்களை, அச்சார்பின் திருப்ப மதிப்புகள் எனவும் கூறுவதுண்டு.

இன்னும், அவ்வளைவரையின் மாறுதல்களை நோக்கு மிடத்து,

C, D, E, F என்பவை யாவும் திருப்பப் புள்ளிகளென விளங்கும்.

C இல் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பு y_3 ; உரிய $x=a_3$;

D இல் ஒரு மீச்சிறு மதிப்பு y_4 ; உரிய $x=a_4$;

E இல் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பு y_5 ; உரிய $x=a_5$;

F இல் ஒரு மீச்சிறு மதிப்பு y_6 ; உரிய $x=a_6$.

ஒரு என்று கூறுவதின் பொருளைப் பார்ப்போம். ஒரு சார்பு, பல மீப்பெரு மதிப்புக்களையும், பல மீச்சிறு மதிப்புக் களையும் பெறலாம்.

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பென்னும் போது, அங்கு அருகா மையில் அது ஒரு மீப்பெரு அல்லது ஒரு மீச்சிறு மதிப்பு என் பதே பொருள். அச் சார்பின் எல்லா மதிப்புகளையும் விட அது மீப்பெரு மதிப்பென்றோ அல்லது அச் சார்பின் எல்லா மதிப்பு களையும் விட அது மீச்சிறு மதிப்பென்றோ பொருள் கொள்வது தவறும். எனவே தான் 'ஒரு' என்ற சொல் பயன்படுத்தப் படுகிறது.

இப்போது, மீச்சிறு மதிப்புக்கள், மீப்பெரு மதிப்புக்கள் பற்றிய வேறு சில முக்கியமான பண்புகளைப் பார்ப்போம்.

(1) மீப்பெரு மதிப்பு எனில் அது கூட்டு மதிப்புடையதாக இருக்க வேண்டுமென்ற தேவையில்லை; ஒரு குறையெண்ணும் கூட ஒரு மீப்பெரு மதிப்பாக இருக்கலாம்.

$x=a_5$ க்குரிய y_5 என்ற மதிப்பு ஒரு மீப்பெரு மதிப்பாகக் கொள்ளப்படுவது காண்க.

(2) மீச்சிறு மதிப்பு எனில் அது குறை மதிப்புடையதாக இருக்க வேண்டுமென்ற தேவையில்லை. ஒரு கூட்டெண்ணும் கூட ஒரு மீச்சிறு மதிப்பாக விருக்கலாம்.

$x=a_2$ க்குரிய y_2 என்ற மதிப்பு ஒரு மீச்சிறு மதிப்பாகக் கொள்ளப்படுவது காண்க.

(3) மீப்பெரு மதிப்புகளெல்லாம் எல்லா மீச்சிறு மதிப்புகளை விடப் பெரிதாக இருக்க வேண்டுமென்ற தேவையுமில்லை.

$x=a_2$ க்குரிய மீச்சிறு மதிப்பு y_2 (+).

$x=a_5$ க்குரிய மீப்பெரு மதிப்பு y_5 (−).

எனவே $y_2 > y_5$ அல்லது $y_5 < y_2$ எனினும் y_2 ஒரு மீச்சிறு மதிப்புத் தான் ; y_5 ஒரு மீப்பெரு மதிப்புத்தான் என்பதையும் காண்க.

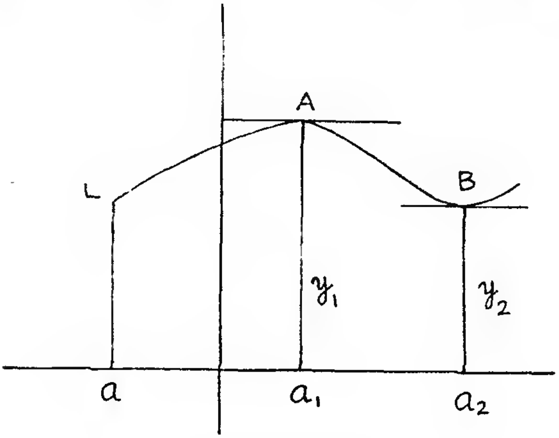
(4) ஒரு மீப்பெரு மதிப்புக்குப் பின் ஒரு மீச்சிறு மதிப்பும், அதைத் தொடர்ந்து ஒரு மீப்பெரு மதிப்பும், ஒன்றுவிட்டொன்று வருவதையும் காண்க. அதாவது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மீப்பெரு மதிப்புக்கள் ஒன்றுக்குப் பின் ஒன்றாகத் தொடர்ந்து வாரா ; அவ்வாறே மீச்சிறு மதிப்புக்களுமாம்.

4.61 மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்கள் ஏற்படும் இடங்களை வகைக்கெழு முறையில் நேரடியாகக் காணல்—கணித்தல் :

$y=f(x)$ இன் வளைவரையான கோட்டுருவப் பட உதவி கொண்டு, மீப்பெரு மதிப்புக்கள், மீச்சிறு மதிப்புக்களெனின், என்னவெனக் கண்டோம். வகைக் கெழுவின் உதவி கொண்டு நேரடியாக, $y=f(x)$ என்ற சார்பிற்கு, எந்தெந்த x இன் மதிப்புகளுக்கு மீப்பெரு மதிப்புக்களும் மீச்சிறு மதிப்புக்களும் பெறப்படுகின்றனவென்பதைப் பார்ப்போம். அதைக் காண, ஒரு திருப்பப் புள்ளியினருகில், அச் சார்பின் வகைக் கெழு என்னவாகிறதென்பதை ஆராய்வோம்.

(1) திருப்பப் புள்ளி—மீப்பெரு மதிப்புக்குரியது.

படம் 4·61 (i) இல் A என்பது ஒரு திருப்பப்புள்ளி; $x = a_1$ க்குரிய மீப்பெரு மதிப்பு y_1. y இன் மதிப்பு L இலிருந்து



படம் 4.61 (i)

வளர்ந்து சென்று, A இல் வளர்வது நின்று குறைவது ஆரம்பமாகி B வரையிலும் மேலும் குறைந்து செல்கிறது.

எனவே L இலிருந்து A வரை $\frac{dy}{dx}$ கூட்டு மதிப்பும் A இலிருந்து B வரை $\frac{dy}{dx}$ குறை மதிப்பும் பெறுகிறது என நாம் அறிவோம் (4·5 காண்க).

மேலும் $\frac{dy}{dx}$ எனப் பெறப்படும் $f'(x)$ உம் பொதுவாக ஒரு x இன் சார்பாக விருக்குமல்லவா? இப்பொழுது $f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண எடுத்துக் கொள்ளும் இடைவெளியில் $(a \leq x \leq a_2)$ $f'(x)$ என்ற சார்பும் தொடர்ச்சியானதென நாம் ஏற்கிறோம். (4·6 காண்க). எனவே $a \leq x \leq a_2$ என்ற இடையில் முதலில் $\frac{dy}{dx}$ என்பது ஒரு கூட்டு மதிப்புடையதாய்த் தொடர்ச்சியாக வந்து பின்னர் $x = a_1$ ஐக் கடந்த பின் ஒரு குறை மதிப்பைப் பெறுவதால், இடையில் ஏதாமொரு இடத்தில் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது பூச்சிய மதிப்பைப் பெற்றேயாக வேண்டும்.

[1·73 (2)] காண்க. அப்பூச்சிய மதிப்பு $x=a_1$ க்குரிய $f(x)=f(a_1)=y_1$ என்ற திருப்பப் புள்ளியில் பெறப்படுகிறது, அதாவது வளர்வது நின்று, குறைவது ஆரம்பமாகும்போது $f'(x)=f'(a_1)=0$ ஆகிறது.

கோட்டுருவப் படங் கொண்டு, இதை வடிவ கணித முறைப்படி நாம் ஒருவாறு காணலாம்.

L என்ற இடத்தில் வளைவரைக்கு ஒரு தொடுகோடு வரைந்தால், அத் தொடுகோட்டின் சரிவு + ஆக இருக்கும்; ஏனெனில் அத்தொடுகோடு, ஒரு குறுங்கோண அளவில் x அச்சுக்கு சாய்ந்திருக்கும் (படத்தில் காட்டப்படவில்லை).

B க்கு இடது பக்கம் சிறிது தூரத்தில் வளைவரைக்கு ஒரு தொடுகோடு வரைந்தால், அத் தொடுகோட்டின் சரிவு −ஆக இருக்கும்; ஏனெனில் அத் தொடுகோடு ஒரு விரிகோண அளவில் x அச்சுக்குச் சாய்ந்திருக்கும். (படத்தில் கற்பனை செய்து காண்க).

அதாவது வளைவரையின் சரிவை அளக்கும் $\tan\Psi$ கூட்டு மதிப்பைப் பெற்று பின்னர் குறை மதிப்பை அடைவதால், நடுவில் ஓரிடத்தில் பூச்சிய மதிப்பைப் பெற்றாக வேண்டும். அது A என்ற புள்ளியில் பூச்சியமாகும்போது, அதாவது $\frac{dy}{dx}=0\ \tan\Psi$ என்ற நிலையில், அப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுவரை x அச்சோடு ஓர் ஒருபோகுக் கோடாக அமைகிறது, $\Psi=0$. அதன் பிறகு, B க்குப் போகும்போது வரையக் கூடிய தொடுவரைகளின் சாய்வுக் கோணங்கள் விரிகோணங்களாகின்றன. $\frac{dy}{dx}=\tan\Psi=$ குறை மதிப்பாகிறது.

எனவே, திருப்பப் புள்ளியானது மீப்பெரு மதிப்புக்குரியதாயின், அங்கு

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

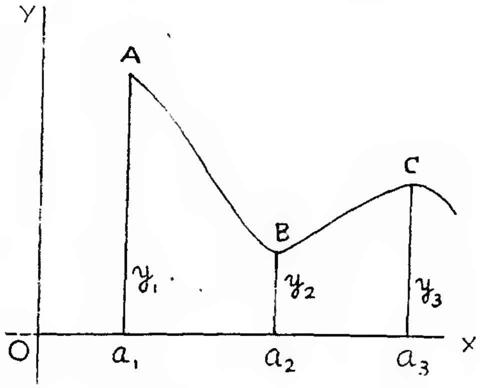
வளைவரை மேல் இடது புறமிருந்து வலப் புறம் போகும்போது

(2) $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு + மதிப்பிலிருந்து, பூச்சியம் வழியாக − மதிப்புக்கு மாறுகிறது.

(3) மீப்பெரு புள்ளிக்குரிய இடத்தில் $\frac{dy}{dx}=0$ ஆகையால் அங்கு வரையப்படும் தொடுவரை, x அச்சுக்கு இணைகோடாக அமைகிறது.

(2) திருப்பப்புள்ளி—மீச்சிறு மதிப்புக்குரியது.

படம் 4·61(ii) இல் ஒரு திருப்பப் புள்ளி.



படம் 4.61 (ii)

$x=a_2$ க்குரிய மீச்சிறு மதிப்பு y_2.

y இன் மதிப்பு A இலிருந்து குறைந்து சென்று B இல் குறைவது நின்று, வளர்வது ஆரம்பமாகி C வரையில் மேலும் வளர்ந்து செல்கிறது.

எனவே A இலிருந்து B வரை $\frac{dy}{dx}$ குறை மதிப்பும், B இலிருந்து C வரை $\frac{dy}{dx}$ கூட்டு மதிப்பும் பெறுகிறதென நாம் அறிவோம்.

மேலும் $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ என்ற சார்பும் அந்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதென நாம் ஏற்கிறோம். எனவே $\frac{dy}{dx}$ என்பது ஒரு குறை$(-)$மதிப்பிலிருந்து தொடர்ச்சியாக வந்து ஒரு கூட்டு

(+) மதிப்பைப் பெறுவதால் இடையில் ஓரிடத்தில் பூச்சிய மதிப்பைப் பெற்றேயாக வேண்டும். $\frac{dy}{dx}$ க்கு அப்பூச்சிய மதிப்பு B என்ற திருப்பப்புள்ளியில் பெறப்படுகிது.

எனவே மீச்சிறு திருப்பப்புள்ளியில், $\frac{dy}{dx} = 0$; இடது புற மிருந்து வலது புறம் வர, $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு குறை (—) மதிப் பிலிருந்து மாறி கூட்டு (+) மதிப்புப் பெறுகிறது. அம்மாற்றம் ஏற்படும்போது, ஓரிடத்தில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகிறது. அவ்விடமே மீச்சிறு மதிப்புக்குரிய இடமாம்.

குறிப்பு: கோட்டுருவப் படத்தைக்கொண்டும் நாம் இதை முன் கூறியபடியாகவே காணமுடியும்.

எனவே திருப்பப்புள்ளி மீச்சிறு மதிப்புக்குரியதாயின் அங்கு,

(1) $\frac{dy}{dx} = 0$

(2) வளைவரைமேல் இடது புறமிருந்து வலது புறம் போகும்போது $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு — மதிப்பிலிருந்து, பூச்சியம் வழியாக + மதிப்புக்கு மாறுகிறது.

(3) மீச்சிறு புள்ளிக்குரிய இடத்தில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகையால், அங்கு வரையப்படும் தொடுவரை, x அச்சுக்கு இணை கோடாக அமைகிறது.

எனவே, ஒரு திருப்பப் புள்ளியில், அதாவது சார்பு ஒரு மீப்பெரு மதிப்பை எய்தும் போதோ அல்லது ஒரு மீச்சிறு மதிப்பையெய்தும் போதோ, அந்த (x, y) க்குரிய $\frac{dy}{dx}$ பூச்சிய மாகிறது.

இந்த அடிப்படையில் $y = f(x)$ -இன் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்புக்குரிய x இன் மதிப்பைக் காணவேண்டின், $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ என எழுதி, $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின்

தீர்வுகள் காண வேண்டும். $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ என்பவை அத்தீர்வுகளாயின், $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots$ என்ற x இன் மதிப்புள்ள இடங்களில் $y = f(x)$ இன் திருப்பப்புள்ளிகள் உள்ளனவெனத் தெரிய வரும். ஆனால் அத்திருப்பப்புள்ளிகளில் எவை மீப்பெரு மதிப்புக்குரியவை, எவை மீச்சிறு மதிப்புக்குரியவை என அந்த நிலையில் கூறுதல் இயலாது. அப்படிப் பெறப்பட்ட திருப்பப் புள்ளிகளில் எவை மீப்பெரு மதிப்புக்குரியவை எவை மீச்சிறு மதிப்பிற்குரியவையெனப் பாகுபாடு செய்ய மற்றோர் முறை கையாளப்படவேண்டும். அது பின்வருமாறு :

(I) மீப்பெரு மதிப்பு :

மீப்பெரு மதிப்பை அடைவதற்குச் சற்று முன் $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு கூட்டு மதிப்பாயிருந்து, திருப்பத்தில் பூச்சியம் மதிப்பைப் பெற்று, உடனே குறைமதிப்பைப் பெறுகிறதாதலின், $\frac{dy}{dx}$ என்ற x இன் சார்பு அச்சிறு இடைவெளியில் ஒரு குறையும் சார்பாகிறதல்லவா? எனவே அதன் முதல் வகைக்கெழு, அதாவது, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$, மீப்பெரு திருப்பத்தருகிலும் மீப்பெரு திருப்பத்திலும் குறை மதிப்பாயிருக்கும். இப் பண்பைக்கொண்டு, ஒரு திருப்பப்புள்ளி மீப்பெரு மதிப்புக் குரியதா அல்லவா எனத் தீர்மானம் செய்து கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு திருப்பப் புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு இதை விளக்கலாம் :

$x = \alpha$ என்ற மதிப்புக்கு $\frac{dy}{dx} = 0$ எனின், α ஒரு திருப்பப் புள்ளி ; அங்கு $\frac{d^2y}{dx^2}$ இன் மதிப்பு, அதாவது $f''(\alpha)$ குறை மதிப்புடையதானால் $x = \alpha$ என்பது ஒரு மீப்பெரு திருப்பப்புள்ளியாகும் ; அங்குள்ள ஒரு மீப்பெரு மதிப்பு $f(\alpha)$ ஆகும்.

மீச்சிறு பதிப்பு :

மீச்சிறு மதிப்பை அடைவதற்குச் சற்று முன், $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு குறை மதிப்புடையதாயிருந்து, திருப்பத்தில் பூச்சிய மதிப்பைப் பெற்று, உடனே கூட்டு மதிப்பைப் பெறுகிறதா

தலின் அச்சிறு இடைவெளியில் $\frac{dy}{dx}$ என்ற x இன் சார்பு ஒரு வளரும் சார்பாகுமல்லவா ? எனவே அதன் முதல் வகைக் கெழு, அதாவது $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$, மீச்சிறு திருப்பத்திற்கருகிலும், மீச்சிறு திருப்பத்திலும் கூட்டு மதிப்பாயிருக்கும். இப் பண்பைக் கொண்டு, ஒரு திருப்பப் புள்ளி மீச்சிறு மதிப்புக் குரியதா அல்லவா எனத் தீர்மானம் செய்து கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு திருப்பப்புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு இதை விளக்கலாம்.

$x = \beta$ என்ற மதிப்புக்கு $\frac{dy}{dx} = 0$ எனின் β ஒரு திருப்பப் புள்ளி ; அங்கு $\frac{d^2y}{dx^2}$ இன் மதிப்பு அதாவது $f''(\beta)$ கூட்டு மதிப்புடையதானால், $x = \beta$ என்பது ஒரு மீச்சிறு திருப்பப்புள்ளியாகும் ; அங்குள்ள ஒரு மீச்சிறு மதிப்பு $f(\beta)$.

எனவே, நாம் இதுவரை மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புக்களைப் பற்றிக் கண்ட பல பண்புகளையும் தொகுத்து, எப்படி $y = f(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு நடைமுறையில் மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புக்கள் காணமுடியும் என்பதைப் படிப்படியாகப் பார்ப்போம்.

(1) $y = f(x)$ இன் முதல் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ காண்க.

(2) $f'(x) = 0$ என ஈடு செய்து இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க. அத்தீர்வுகள் α_1, α_2, α_3,......... என இருப்பின், $x = \alpha_1$; $x = \alpha_2$; $x = \alpha_3$ .... என்ற இடங்களில் $f(x)$ இன் திருப்பப்புள்ளிகள் உள்ளன.

(3) பிறகு $\frac{d}{dx}\left[f'(x) \right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$ அதாவது $y = f(x)$ இன் இரண்டாவது வகைக்கெழு காண்க.

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}$ உம் ஒரு x இன் சார்பாகவிருக்கும். அச் சார்பில் $x = \alpha_1$ ஈடு செய்தால் கூட்டு மதிப்புப் பெறப்படின் $x = \alpha_1$

என்ற திருப்பப்புள்ளி ஒரு மீச்சிறு திருப்பப்புள்ளி எனக் கொள்க ; மாறாக $x = \alpha_1$ ஐ $\frac{d^2y}{dx^2}$ இல் ஈடு செய்தால் குறை மதிப்புப் பெறப்படின், $x = \alpha_1$ என்ற திருப்பப்புள்ளி ஒரு மீப்பெரு திருப்பப்புள்ளி எனக் கொள்க.

இவ்வாறே $x = \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots$ என $\frac{d^2y}{dx^2}$ இல் ஈடு செய்து பெறப்படும் மதிப்புக்களின் கூட்டு அல்லது குறைக்குறிகளின் அடிப்படையில் முறையே மீச்சிறு, மீப்பெரு திருப்பமெனக் கண்டு, கொண்டு உரிய மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புக்களைக் காண்க.

4·63 எடுத்துக்காட்டுகள் :

$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$ இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க.

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 24$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18$

$3x^2 - 18x + 24 = 0$ என ஈடு செய்க.

$\therefore \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

இதன் தீர்வுகள் 2, 4 ; இவை திருப்பபபுள்ளிகள்.

$x = 2$ என ஈடு செய்ய $\frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 18 = -6$ (குறை)

$\therefore \quad x = 2$க்குரிய திருப்பப்புள்ளி

$y = f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்புக்குரியது.

$x = 4$ என ஈடு செய்ய $\frac{d^2y}{dx^2} = 24 - 18 = 6$ (கூட்டு)

$\therefore \quad x = 4$க்குரிய திருப்பப்புள்ளி

$y = f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்புக்குரியது.

மீப்பெருமதிப்பு : $x = 2$க்குரியது.

$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$

$= (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) + 3.$

$= 8 - 36 + 48 + 3.$

$= 23$ (மீப்பெரு மதிப்பு)

மீச்சிறுமதிப்பு : $x = 4$க்குரியது

$y=(4)^3-9(4)^2+24(4)+3$

$=64-144+96+3$

$=19$ (மீச்சிறு மதிப்பு)

(2) $y=x^2-6x+19$ என்ற சார்பின் திருப்பப்புள்ளி காண்க; அது மீச்சிறு, அல்லது மீப்பெரு திருப்பமா எனவும் அத்திருப்ப மதிப்பு என்னவெனவும் காண்க.

$y=x^2-6x+19.$

$\frac{dy}{dx}=2x-6=0\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2}=2$ (கூட்டு)

$\therefore\ x=3$ இல் மீச்சிறு திருப்பப்புள்ளி.

மீச்சிறு மதிப்பு $=3^2-6\times3+19=10.$

(3) $y=5+16x-x^2$ என்ற சார்பின் திருப்பப்புள்ளி காண்க; அது மீச்சிறு, அல்லது மீப்பெரு திருப்பமா எனவும், அத்திருப்ப மதிப்பு என்னவெனவும் காண்க.

$y=5+16x-x^2$

$\frac{dy}{dx}=16-2x=0\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2}=-2$ (குறை)

$\therefore\ x=8$ இல், மீப்பெரு திருப்பப்புள்ளி. மீப்பெருமதிப்பு

$=5+16\times8-8^2$

$=69.$

(4) $y=2\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளை $x=0$ முதல் $x=2\pi$ வரை உள்ள இடைவெளியில் காண்க.

$y=2\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x$

$\frac{dy}{dx}=2\cos x-\frac{2}{3}\times3\cos 3x.$

$=2\cos x-2\cos 3x=0.$

$\frac{d^2y}{dy^2}=-2\sin x+6\sin 3x.$

$2\cos x-2\cos 3x=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் காணலாம்.

$2\cos x-2(4\cos^3 x-3\cos x)=0.$

$\therefore\ 8\cos x-8\cos^3 x=0.$

$\therefore\ 8\cos x\,(1-\cos^2 x)=0.$

$\therefore\ \cos x=0.\ \therefore\ x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}.$

$1-\cos^2 x=0.$

$\therefore\ \cos x=\pm 1.\quad \therefore\ x=0\,;\ 2\pi.$

$\cos x=-1\,;\quad x=\pi.$

எனவே $(0,\ 2\pi)$ என்ற இடைவெளியில் $x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$ $\frac{3\pi}{2},\ 2\pi$ என்ற இடங்களில் திருப்பப்புள்ளிகள் உள்ளன.

அந்த திருப்பப்புள்ளிகளுக்குரிய $\frac{d^2y}{dx^2}$ இன் மதிப்புக்கள் பின் அட்டவணையில் காண்க.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\sin x+6\sin 3x$	0	-8	0	8	0

$x=\frac{\pi}{2}$ என்ற புள்ளியில் $\frac{d^2y}{dx^2}=-8$ (குறையெண்)

$x=\frac{\pi}{2}$ என்ற மதிப்புக்கு மீப்பெரு மதிப்பு.

மீப்பெரு மதிப்பு $=2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{2}$

$=2-\frac{2}{3}\ (-1)$

$=2\frac{2}{3}.$

$x=\frac{3\pi}{2}$ என்ற புள்ளியில் $\frac{d^2y}{dx^2}=8$ (கூட்டு)

$\therefore\ x=\frac{3\pi}{2}$ என்ற புள்ளியில் மீச்சிறு மதிப்பு.

அம்மீச்சிறு மதிப்பு $=2\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{2}{3}\sin\frac{9\pi}{2}.$

$=2\,(-1)-\frac{2}{3}\ (1).$

$$= -2 - \frac{2}{3}.$$
$$= -2\tfrac{2}{3}.$$

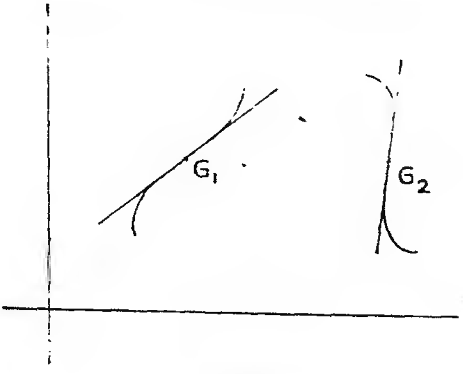
இப்போது $x=0$, π, 2π என்ற மதிப்புக்களுக்கு $\frac{d^2y}{dx^2}$ பூச்சிய மாகிவிடுகிறது; அதாவது கூட்டு மதிப்புமல்ல, குறை மதிப்புமல்ல.

அவ்விதமான புள்ளிகள் மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புக்களுக்குரிய புள்ளிகளாகா.

அவை ஒரு தனிச்சிறப்பு வாய்ந்த புள்ளிகளாகும். அவை கணநிலைப்புள்ளிகள் (Stationary points) எனப்படும். அதாவது $x=\alpha$ என்ற மதிப்புக்கு $\frac{dy}{dx}$ உம், $\frac{d^2y}{dx^2}$ உம் ஒருங்கே பூச்சியமாயின் α என்பது ஒரு கணநிலைப் புள்ளி எனப்படும்.

படம் 4.6 இல் G என்ற புள்ளி அவ்வகைப்படும். அங்கு $\frac{dy}{dx}=0$ ஆகி தொடுவரை x அச்சுக்கு இணைகோடாக இருக்கும். ஆனால் இது ஒரு மீப்பெரு மதிப்புக்கோ மீச்சிறு மதிப்புக்கோ உள்ள புள்ளியல்ல என்பது படத்தில் பார்க்க வரும்.

அது மட்டுமல்லாமல், சில சார்புகளில் $x=\alpha$ என்ற



படம் 4·63

ஓரிடத்தில் $\frac{dy}{dx}$ பூச்சியமாகாமலே $\frac{d^2y}{dx^2}$ பூச்சிய மாகலாம்;

அப்படிப்பட்ட புள்ளி வளைமாற்றுப் புள்ளி (point of inflexion) என்று சொல்லப்படும். படம் 4·63 இல் G_1, G_2 என்பவை அப்படிப்பட்ட புள்ளிகளாகும்.

(5) $y=(x-1)^3 (x-2)^2$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க.

$$y=u\times v;\quad u=(x-1)^3;\quad v=(x-2)^2.$$

$$\therefore\quad \frac{du}{dx}=3(x-1)^2;\quad \frac{dv}{dx}=2(x-2).$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}= u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

$$=(x-1)^3.\ 2(x-2)+(x-2)^2.\ 3(x-1)^2$$

$$=(x-1)^2(x-2)[2(x-1)+3(x-2)].$$

$$=(x-1)^2(x-2)(5x-8).$$

$$=(x-1)^2(x-2)(5x-8).$$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் 1, 1, 2, $\frac{8}{5}$. இவை திருப்பப் புள்ளிகளெனக் கொண்டு, இவற்றினைப் பாகுபடுத்துவோம்.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2(x-1)(x-2)(5x-8)$$
$$+(x-1)^2(5x-8)+(x-1)^2(x-2)5.$$

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையைக் காண்க.

x	1	1	2	$\frac{8}{5}$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	0	0	2	$-\frac{18}{25}$

எனவே $x=2$ ஒரு மீச்சிறு திருப்பம்; மீச்சிறு மதிப்பு பூச்சியம்.

$x=\frac{8}{5}$ ஒரு மீப்பெரு திருப்பம்;

மீப்பெரு மதிப்பு $=\left(\frac{8}{5}-1\right)^3\left(8/5-2\right)^2$

$$=\frac{27}{125}\times\frac{4}{25}=\frac{108}{3125}.$$

$x=1$ என்ற புள்ளி எடுத்துக்காட்டு (4) இல் விளக்கப்பட்டபடி, மீப்பெரு திருப்பமும் அல்ல, மீச்சிறு திருப்பமும் அல்ல ; ஆனால் $x=1$ என்பது y இன் கணநிலைப்புள்ளியாகும்.

(6) $y=a\sin^2 x+b\cos^2 x$ இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க. (இடைவெளி 0 முதல் π வரை)

$$y=a\sin^2 x+b\cos^2 x.$$

$$\frac{dy}{dx}=2a\sin x\cos x-2b\sin x\cos x.$$

$$=(a-b)\sin 2x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2(a-b)\cos 2x.$$

$\frac{dy}{dx}=(a-b)\sin 2x=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\sin 2x=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும் ; ஏனெனில் $a\neq b$, எனவே $a-b\neq 0$.

$\sin 2x=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $2x=0$; மற்றொரு தீர்வு $2x=\pi$. மற்றொரு தீர்வு $2x=2\pi$.

எனவே 0 முதல் 2π என்ற இடைவெளியில் $\frac{dy}{dx}=0$ இன் தீர்வுகள் $x=0$; $x=\frac{\pi}{2}$; $x=\pi$.

$x=0$ க்கு $\frac{d^2y}{dx^2}=2(a-b)$

$x=\frac{\pi}{2}$ க்கு $\frac{d^2y}{dx^2}=-2(a-b)$.

$x=\pi$ க்கு $\frac{d^2y}{dx^2}=2(a-b)$.

$a>b$ ஆனால் $2(a-b)$க்குக் கூட்டுக்குறி $-2(a-b)$ க்குக் குறைக் குறி. எனவே $a>b$ ஆனால்

$x=0$ என்பது மீச்சிறு திருப்பம்.

$x=\frac{\pi}{2}$ என்பது மீப்பெரு திருப்பம்.

$x=\pi$ என்பது மீச்சிறு திருப்பம்.

$x=0$; மீச்சிறு மதிப்பு b.

$x=\frac{\pi}{2}$; மீப்பெரு மதிப்பு a.

$x=\pi$; மீச்சிறு மதிப்பு b.

மாறாக, $a<b$ ஆனால்

$x=0$; $\frac{d^2y}{dx^2}=-$ குறி ; மீப்பெரு மதிப்பு b.

$x=\frac{\pi}{2}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=+$ குறி ; மீச்சிறு மதிப்பு a.

$x=\pi$; $\frac{d^2y}{dx^2}=-$ குறி ; மீப்பெரு மதிப்பு b.

இரு நிலைகளிலும், மீப்பெரு திருப்பமும், மீச்சிறு திருப்பமும், ஒன்று விட்டு மாறி மாறி வருவதைக் காண்க.

4.7 மீப்பெரு மதிப்பு, மீச்சிறு மதிப்பையொட்டிய சில விதமான கணக்குகள் :

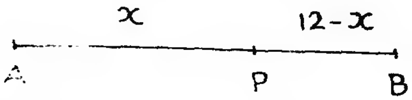
முன் கூறப்பட்ட முறைகளைக் கையாண்டு பல வியப்புக்குரிய கணக்குகளைப் போடலாம்.

அவற்றில் பெரும்பாலும் பார்த்தவுடனேயே மீப்பெரு மதிப்பா, மீச்சிறு மதிப்பா எனத் தெரிந்து விடுமானால் $\frac{d^2y}{dx^2}$ இன் மதிப்பைக் கணித்து அது கூட்டு மதிப்புடையதா, குறைமதிப்புடையதாவெனக் காண வேண்டிய தேவை ஏற்படாது. $\frac{dy}{dx}$ என்ற சமன்பாடு கொண்டே, தேவைப்படும் விவரங்களை அறிந்து கொள்ளலாம்.

பொதுவாக, ஓரிரண்டு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் கொண்டு மற்றோர் குறிப்பிட்ட அளவு அல்லது மதிப்பு எப்போது மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு அளவைப் பெறும் என்ற வகையில் இவ்விதக் கணக்குகள் அமையும். கண்டுபிடிக்க வேண்டிய மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு அளவை (மதிப்பை) சார்புடை மாறி y அல்லது V அல்லது S எனக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு $y=(f)x$ என்ற சார்பு அமைக்க வேண்டும். அதன் பின்னர், நாம் அறிந்த முறைப்படி, y இன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்பைக் காண வேண்டும். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இம்முறைகளை விளக்கும்.

4·71 எடுத்துக்காட்டு :

1. AB என்ற நேர்கோட்டின் நீளம் 12 செ.மீ. அதில் $AP.\ PB$ என்ற மதிப்பு மீப்பெரு மதிப்புடையதாக விருக்க, P எங்கிருக்க வேண்டும் ?



AB என்ற கோட்டில் P என்ற புள்ளி எடுத்துக் கொள்க. $AP=x$ எனக் கொண்டால், $PB=12-x$ ஆகிறது.

$AP.\ PB=y=x\ (12-x)$ என்ற சார்பு பெறுக. y என்பது x இன் சார்பாகிறது. இப்போது x என்னவானுல் y இன் மதிப்பு மீப்பெரிதாகிறது எனக் காணும் முறையை நாம் அறிவோம். அதைப் பயன்படுத்தி y இன் மீப்பெரு மதிப்புக் குரிய x இன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$y=x\ (12-x).$$
$$=12x-x^2.$$
$$\frac{dy}{dx}=12-2x=0$$
$$\therefore\quad x=6.$$

P என்பது AB இன், மையப்புள்ளியாயின் $AP.\ PB$ இன் மதிப்பு மீப்பெரு மதிப்பாகும். மீச்சிறு மதிப்பு பூச்சியமாகத் தானிருக்கும். அப்போது P என்பது A உடனே அல்லது B உடனே ஒன்றிவிடும்.

எனவே $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$ எனக் கண்டுதான் $x=6$ க்குரிய திருப் பமெனக் காணத் தேவையில்லை.

குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட சுற்றளவு உள்ள பல செவ் வகங்களுக்குள்ளே, அச் சுற்றளவு பெற்ற சதுரம் தான் மீப் பெரு பரப்பு பெற்றது என்பதை இதிலிருந்து அறியலாம். சுற்றளவு $4a$ (மாறிலி) ; பரப்பு$=x\ (2a-x)$ அல்லது $y=2ax-x^2$; $\frac{dy}{dx}=2a-2x=0$ என்னும்போது $x=a$ பக்கமுள்ள சதுரமே மீப் பெரு மதிப்புடையது.

2. சதுர மட்டமுடைய ஒரு திறந்த செவ்வகப் பெட்டி 1728 சதுர செ.மீ. பலகையைக் கொண்டு செய்யப்பட வேண்டும். அப்பெட்டியின் கொள்ளளவு மீப்பெரு மதிப்பு பெற்றிருக்க வேண்டுமாயின், அப்பெட்டியின் அளவுகள் காண்க.

சதுரமட்ட பக்கம் x செ.மீ., உயரம் h எனவும் கொண்டால், பலகைப் பரப்பு x^2+4hx.

$$\therefore \quad x^2+4hx = 1728.$$

$$\therefore \quad h=\frac{1728-x^2}{4x}$$

$$=\left(\frac{432}{x}-\frac{x}{4}\right).$$

$\therefore$ பெட்டியின் கொள்ளளவு $V=x^2h$

$$=x^2\left(\frac{432}{x}-\frac{x}{4}\right)$$

$$=\left(432x-\frac{x^3}{4}\right)$$

V இன் மீப்பெரு மதிப்புப் பெற,

$\frac{dV}{dx}=432-\frac{3x^2}{4}=0$ என ஈடு செய்க.

$$\therefore \quad 3x^2 = 1728.$$

$$x^2 = 576.$$

$$\therefore \quad x= 24.$$

$\therefore$ பெட்டியின் தளமட்ட சதுரப்பக்கம் 24 செ.மீ.

உயரம் $= \frac{432}{24}-\frac{24}{4}$.

$= 12$ செ.மீ.

மீப்பெரு கொள்ளளவு $= 24\times24\times12$

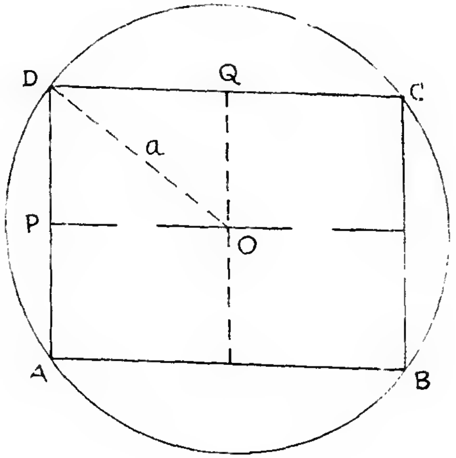
$= 6912$ க.செ.மீ.

பரப்பளவு $= 24\times24+4\times24\times12$

$= 1728$ ச.செ.மீ. என சரிபார்த்துக் கொள்க.

(3) ஒரு செவ்வக தூலத்தின் (beam) அழுத்தம் அதன் அகலத்திற்கும் உயரத்தின் இருபடிக்கும் நேர்த்தகவுடையது. ஒரு வட்ட உருளை வடிவில் உள்ள மரக்கட்டையின் ஆரம் a செ.மீ.; அதிலிருந்து மீப்பெரு அழுத்தமுடைய ஒரு தூலம் அறுத்தெடுக்கப்படவேண்டுமானல், அத்தூலத்தின் செவ்வக வெட்டு முகத்தின் அளவுகள் என்ன ?

படம் 4·64 இல் உள்ளபடி $ABCD$ என்ற வெட்டு முகம் கொண்ட தூலம், மீப்பெரு அழுத்தமுடையது எனக்



படம் 4·34

கொள்வோம். அதன் அகலம் $CD=2x$ எனக் கொண்டால், அதன் உயரம் $AD=2DP$

$$= 2\sqrt{a^2-x^2}$$

∴ அத் தூலத்தின் அழுத்தம் y எனின் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டபடி,

$$y=K.\,2x\,[2\sqrt{a^2-x^2}]^2.$$
$$=8\,Kx\,(a^2-x^2)$$

y இன் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{dy}{dx}=0$க்கு உரியதாகும்.

எனவே $\frac{dy}{dx}=8K\,(a^2-3x^2)=0$ என ஈடு செய்க.

$$\therefore \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$\therefore$ மீப்பெரு அழுத்தமுடைய தூலத்தின் அகலம்

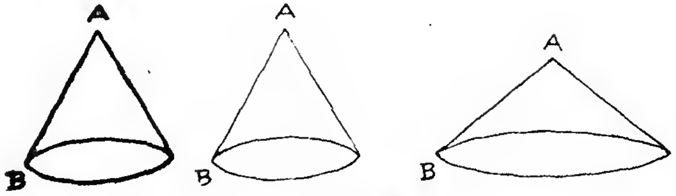
$$= \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\,a}{3}$$

$$\text{உயரம்} = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}$$

$$= 2a\sqrt{2/3} = \frac{2\sqrt{6}\,a}{3}.$$

(4) ஒரு கூம்பின் சாய்வுயரம் 9 செ.மீ. அக்கூம்பின் கொள்ளளவு மீப்பெரு மதிப்புடையதாயிருக்க வேண்டுமானல், அக்கூம்பின் அடித்தள ஆரம் என்னவாயிருக்க வேண்டும்?

கீழ்வரும் கூம்புகளைக் காண்க. அவை யாவும் ஒரே அளவு (9 செ.மீ.) சாய்வுயரம் ($=AB$) உடையவை (படம் 4.65)



படம் 4.65

ஆனல் அவற்றின் கொள்ளளவு வேறுவேருகும். எனவே, என்ன ஆரம், என்ன குத்துயரம் பெற்ற கூம்பிற்கு மீப்பெரு கொள்ளளவு இருக்குமெனக் காண வேண்டும்.

அடித்தள ஆரம் x உம்

குத்துயரம் h உம் ஆனல் $x^2+h^2=81$ என்ற கட்டுப்பாடு எல்லா கூம்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

கூம்பின் கொள்ளளவு $V = \frac{1}{3}\pi x^2 h.$

$$= \frac{1}{3}\pi h(81-h^2)$$

$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi\{81-3h^2\}=0$ ஆகவிருப்பின் V தனது மீப்பெரு மதிப்புப் பெறும்.

$$\therefore \quad 3h^2-81=0$$

$$\therefore \quad h^2=27$$

$$h=3\sqrt{3}.$$

உயரம் $3\sqrt{3}$ செ.மீ.

அடித்தள ஆரம் $=\sqrt{81-27}$

$=\sqrt{54}$

$=3\sqrt{6}$ செ.மீ.

பயிற்சி 4.3

1. பின்வரும் சார்புகளின் மீச்சிறு/மீப்பெரு மதிப்புக்களையும், அவற்றிற்குரிய திருப்பப் புள்ளிகளையும் காண்க.

(i) x^3-6x^2+9x-3

(ii) $2x^3-3x^2-36x+11$

(iii) $x^4-6x+12$

(iv) $(x-3)(6+x)$

(v) $2x^2-12x+8$

(vi) $2x^3-3(a+b)x^2+6abx+24a^2$
($a>b$ மாறிலிகள்)

(vii) $4\sin x+3\cos x$.

2. பின்வரும் சார்புகளில் திருப்பப்புள்ளிகள் மட்டும் காண்க.

(i) $x(x+1)(x+2)$

(ii) $(x-2)(x-3)(x-4)$.

3. பின் வரும் சார்புகளில் கண நிலைப்புள்ளிகள் உள்ளனவா, இருப்பின் அவற்றின் x-மதிப்புக்களென்னவெனக் காண்க.

(i) $(x-2)\ (x-3)^2$.

(ii) $(x+1)\ (x-2)^4\ (x-1)^2$.

(iii) $x\ (a-x)^2$.

(iv) $x^2\ (x-1)^3$.

(v) $(x+a)^3\ (ax+b)$.

4. $3x-2x^2+7$ சார்பு மீப்பெரு மதிப்பு பெறுமா, மீச்சிறு மதிப்பு பெறுமா எனக் கண்டு அம்மதிப்பைக் காண்க.

5. ax^2+bx+c என்ற சார்பில் (i) a கூட்டுமதிப்புடையது; (ii) a குறைமதிப்புடையது; தனித்தனியே அச்சார்பு மீப்பெரு மதிப்பு பெறுமா, மீச்சிறு மதிப்பு எனக் காண்க.

6. ஒரு முப்படிச்சார்பு, $x=1$ என்ற இடத்தில் மீப்பெரு மதிப்பு 12 உம், $x=3$ என்ற இடத்தில் மீச்சிறு மதிப்பு 8 உம் பெறின், அம்முப்படிச்சார்பைக் காண்க.

7. AB என்ற நேர்கோட்டின் நீளம் 10 செ.மீ. $2AP^2+3PB^2$ என்ற மதிப்பு மீச்சிறு மதிப்பாயிருப்பதற்குரிய P என ஒரு புள்ளியை AB இல் காண்க.

8. ஒரு தகுபின்னத்திற்கும் அதன் இருபடிக்கும் உள்ள வேறுபாடு மீப்பெருமதிப்புடையதாயிருக்கும்படியான பின்னம் காண்க.

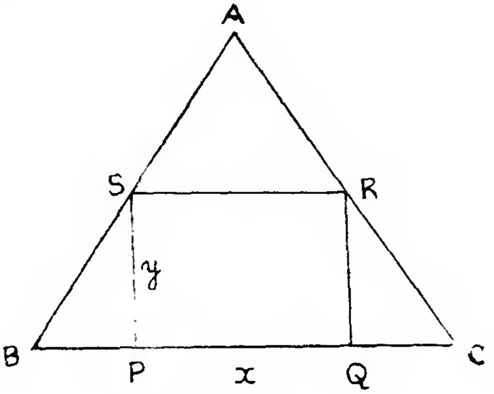
9. ஒரு கூம்பின் சாய்வுயரம் 15 செ.மீ. அந்த சாய்வுயரம் கொண்டு, மீப்பெரு கொள்ளளவு பெறும் கூம்பின் தளமட்ட ஆரம் காண்க.

10. ஒரு திறந்த செவ்வக மரப்பெட்டி செய்ய 30,000 ச.செ.மீ. மரப்பலகை இருக்கிறது. அது சதுரதளம் பெற்றதாயும் மீப்பெரு கொள்ளளவு பெற்றதாயும் இருக்க வேண்டும். அதன் பக்கம், உயரம் காண்க.

11. ஒரு அரைவட்டத்தைத் தனது பக்கத்தில் தாங்கும் செவ்வக அமைப்பில் ஒரு பலகணி உள்ளது, அதன் பரப்பு மீப்பெருமதிப்புடையதாயிருக்க, செவ்வக உயரம்: அரைவட்ட விட்டம் $=1:2$ என நிறுவுக.

12. ஓர் உருளையின் நீளமும், அதன் சுற்றளவும் சேர்ந்து 180 செ.மீ. இருக்க வேண்டும். அதன் கொள்ளளவு மீப்பெருமதிப்பு பெறவேண்டுமெனின் அவ்வுருளையின் நீளம், வட்ட ஆரம் என்னவாயிருக்க வேண்டும்?

13. படத்தில் (4.66) உள்ளபடி ABC என்ற முக்கோணத்தினுள் BC இன் மேல் ஒரு பக்கம் அமையுமாறு ஒரு செவ்வகம் வரையப்படுகிறது. இந்தப் பக்கத்தின் நீளம் $PQ=x$. மற்ற



படம் 4.66

பக்கம் $PS=y$; $BC=a$; A யிலிருந்து BC க்குரிய குத்துக்கோட்டின் நீளம் b ஆனால் $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$ என நிறுவுக. இந்தத் தொடர்பைப் பயன்படுத்தி, அம்முக்கோணத்தினுள் வரையப்படக்கூடிய மீப்பெரு பரப்பு பெற்ற செவ்வகத்தின் பரப்பென்ன ?

14. புவியீர்ப்புச் சக்திக்கு நேரெதிராக ஒருபொருள் மேலே எறியப்படுகிறது. t வினாடிகளில் அது செல்லும் உயரம் (அடிகளில்) $s=160t-16t^2$ என்ற வாய்பாட்டால் பெறப்படுகிறது. அது எவ்வளவு தூரம் உயரச் செல்லும்?

15. $AB=9$ செ.மீ, $BC=6$ செ.மீ கொண்ட ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ உள்ளது. CD யில் $PC=x$ செ.மீ. என்ற அளவில் P என்ற ஒரு புள்ளி கொள்ளப்படுகிறது. (PA^2+PB^2) இன் மதிப்பை x இன் சார்பாகத் தருக. அதன் மீச்சிறு மதிப்பையும் காண்க.

16. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செம்பக்கம் a; செங்கோணம் தாங்கும் பக்கங்கள் முறையே b,c. a க்கும் bக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் 60° ஆனால் மட்டுமே $(a+b)$ இன் மதிப்பு மீப்பெரு மதிப்பாகிறதென நிறுவுக.

17. ஒரு ஈய கோளத்தின் மேற்பரப்பு S_1; ஒரு ஈயகன சதுரத்தின் மேற்பரப்பு S_2. $S_1+S_2=A$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலி அளவில் இவ்விரண்டின் கொள்ளளவு மீச்சிறு மதிப்புடையதாயிருப்பின் கோளத்தின் விட்டமும், கனசதுரத்தின் பக்கமும் சமமென நிறுவுக.

18. 16 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கம்பியை, இரு துண்டுகளாக்கி, ஒன்றினை ஒரு வட்டமாகவும் மற்றொன்றினை ஒரு சதுரமாகவும் வளைத்து விட்டால், அவ்விரு பரப்புகளது கூட்டுத் தொகையின் மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{64}{\pi+4}$ என நிறுவுக.

19. ஒரு வட்ட உருளையின் வட்ட ஆரமும், நீளமும் சேர்ந்து 24செ.மீ. (1) அது மீப்பெரு கொள்ளளவு பெற்றிருக்குமாயின் (2) அதன் மேற்பரப்பு, மீப்பெரு மதிப்பு ஏற்குமாயின், அவ்வுருளையின் ஆரத்தையும் நீளத்தையும் கணக்கிடுக.

20. 12 செ.மீ. உயரம், தளமட்டவட்ட ஆரம் 9 செ.மீ. பெற்ற ஒரு கூம்பினின்று குடைந்தெடுக்கக் கூடிய உருளையின் மீப்பெரு கொள்ளளவு காண்க.

21. மிகக்குறைவான தகடு பயன்படுத்தி, πa^3 கொள்ளளவு பெற்ற ஒரு திறந்த உருளை உருவத்தொட்டி செய்ய வேண்டுமானால், அவ்வுருளையின் உயரம், மட்டவட்ட ஆரம் என்ன இருக்கவேண்டும்?

22. ஒரு கப்பல் ஓட்ட தினம் நிலக்கரிச் செலவு $4K^3v^2$, சம்பளச் செலவு $\frac{C^3}{V}$; K, C மாறிலிகள்; v கப்பலின் வேகம். ஒரு கப்பற் செலவை மிகக்குறைந்த பணச் செலவில் முடிக்க, நிலக்கரி விலை சம்பளச் செலவில் பாதியாக இருக்கவேண்டுமென நிறுவுக.

V. வகைக் கெழு — மாறிகளின் மாறுவீத அளவு

(Differential coefficient a Rate - measure of Variables)

இப்பகுதியில் ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு, அம் மூலச் சார்பின் எத்தன்மைத்தான பண்பைக் குறிக்கிறதெனவும், ஒரு மூலச் சார்பிற்கும், அதன் வகைக் கெழுக்கும் உள்ள தொடர்பென்னவெனவும் காண்போம். $y = f(x)$ என்ற சார்பினை எடுத்துக் கொள்வோம். $x = a$, $x = a+h$ என்ற இரு மதிப்புக்களுக்கும் $y = f(a)$, $y = f(a+h)$ என்ற உரிய இரு மதிப்புக்கள் பெறப்படும்.

அதாவது x என்ற சார்பில் மாறியில் h என்ற அளவான ஏற்றம் உண்டாகும்பொழுது y [அல்லது $f(x)$] என்ற சார்புடை மாறியில் ஏற்படும் ஏற்றம் $f(a+h) - f(a)$ ஆகும். எனவே $(a, a+h)$ என்ற இடைவெளில், x ஒரு அலகு ஏற்றம் பெறின் y இன் சராசரி ஏற்றம் அல்லது சராசரி மாறுவீதம் (average Rate of Change) $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ என அளவிடலாம். ஆனால் இது ஒரு இடைவெளியில் சராசரி ஏற்றமேயொழிய $x = a$ என்ற குறிப்பிட்ட இடத்தில் y இன் மாறுவீதத்தைக் குறிப்பிடாது. $x = a$ என்ற குறிப்பிட்ட இடத்தில் மாறுவீதம் காண,

$$\underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

இது $f'(x)$ இல் x க்கு a ஈடுசெய்தால் பெறப்படும் மதிப்பு ; அதாவது $\frac{dy}{dx}$ இல் x க்கு a ஈடு செய்தால் பெறப்படும் மதிப்பு $\therefore$ $f(a+h) f - (a)$ என்ற மதிப்பை Δy எனவும்

h என்ற மதிப்பை Δx எனவும் குறிப்பிட்டால் $x = a$ என்ற இடத்தில்

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$ என்பது x ஒட்டிய y இன் மாறுவீதம் எனக் கிடைக்கிறது.

ஒரு எடுத்துக்காட்டால் இதனை விளக்குவோம். $y = x^2$ என்ற சார்பைக் கொள்வோம்.

$x = a$ என்ற இடத்தில் $y = a^2$

$x = a+h$ என்ற இடத்தில் $y = (a+h)^2$

$$\therefore \frac{y \text{ இல் ஏற்றம்}}{x \text{ இல் ஏற்றம்}} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{(a+h) - a}$$

$$= \frac{2ah + h^2}{h}$$

$$= 2a + h$$

$(a, a+h)$ என்ற இடைவெளியில் $(2a+h)$ என்பது xஐ ஒட்டி y இன் சராசரி மாறுவீதமாகும். h இன் மதிப்பு பூச்சிய எல்லையை நெருங்கும்போது, அதாவது $x = a$ என்ற இடத்தில், x ஐ ஒட்டி, y இன் மாறுவீதம் $2a$ எனப் பெறப்படுகிறது.

அவ்வாறே $x = b$ என்ற இடத்தில் x ஐ ஒட்டி y இன் மாறுவீதம் $2b$ எனவும் $x = C$ என்ற இடத்தில் அம்மாறுவீதம் $2C$ எனவும் கிடைப்பதைக் காணலாம். எனவே, பொதுப்படக் கூறின், x ஒட்டி y இன் மாறுவீத அளவு $2x$, அதாவது x ஐ ஒட்டிய y இன் வகைக்கெழுவான $\frac{dy}{dx}$. ஆகவே ஒரு குறிப்பிட்ட x க்கு y இன் மாறுவீதம் $\frac{dy}{dx}$.

$x = 1$ என்ற இடத்தில் மாறுவீதம் 2, $x = -4$ என்ற இடத்தில் மாறுவீதம் -8. இப்போது கூட்டு, குறை மாறுவீத மதிப்புக்களின் பொருளென்னவெனக் காண்போம். முன்னர் 4·5 இல் கண்டபடி, கூட்டு மதிப்புடைய வகைக்கெழு, மூலச் சார்பின் வளரும் பண்பைக் குறிக்கிறதெனவும், குறை மதிப்புடைய வகைக்கெழு, அச்சார்பின் குறையும் பண்பைக் குறிக்கிறதெனவும் கண்டோம். அந்த அடிப்படையில், $x = 1$ என்ற இடத்திற்கு இருபுறம் அண்மையில் [அதாவது h என்ற ஒரு சிறிய கூட்டு எண் கொண்டால் $(1-h, 1+h)$ என்ற இடைவெளியில்] $y = x^2$ என்ற சார்பு வளரும் சார்பெனத் தெரி

கிறது. $x = -4$ என்ற இடத்திற்கு இருபுறம் அண்மையில் [அதாவது $(-4-h$ முதல் $-4+h)$ என்ற இடைவெளியில்] அச் சார்பு குறையும் சார்பெனத் தெரிகிறது.

மற்றுமோர் எடுத்துக்காட்டு :

$y = \cos 2x$ இடைவெளி $(0, \pi)$; h என்பது ஒரு மிகச் சிறிய கூட்டு மதிப்புடையது.

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin 2x$$

$$x = \frac{\pi}{3} \; : \; \frac{dy}{dx} = -2 \sin 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{dy}{dx} = -2 \sin 180^\circ = 0$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \; , \; \frac{dy}{dx} = -2 \sin 240 = \sqrt{3}$$

எனவே $\left(\frac{\pi}{3} - h, \frac{\pi}{3} + h\right)$ என்ற இடைவெளியில் $\cos 2x$ என்பது ஒரு குறையும் சார்பு ; $\frac{\pi}{2}$ என்ற இடத்தில் திருப்பப் புள்ளி; $\left(2\frac{\pi}{3} - h \;,\; \frac{2\pi}{3} + h\right)$ என்ற இடைவெளியில் $\cos 2x$ என்பது ஒரு வளரும் சார்பு.

இப்போது நடைமுறையில், மற்ற அறிவியல் துறைகளில் மாறு விகிதம் என்ற வகையில் வகைக்கெழு எவ்வாறு பயன் படுகிறதெனப் பார்ப்போம்.

(a) ஒரு துகள் t விநாடிகளில் செல்லும் தூரம் s. எனவே s இன் அளவு t இன் மதிப்பைப் பொறுத்திருக்குமென நாம் அறிவோம்.

எனவே $s = f(t)$ என்பது செல்லும் தூரத்தையும், கடந்த நேரத்தையும் தொடர்புபடுத்தும் ஒரு சார்பெனக் கொள்ள லாம். t_1 விநாடிகளில் செல்லும் தூரம் s_1 எனவும் $t_1 + \Delta t_1$ விநாடிகளில் செல்லும் தூரம் $s_1 + \Delta s_1$ எனவும் கொண்டால், t_1 விநாடி ஆரம்பத்தில் அதன் வேகம் (velocity) =

$$\underset{\Delta t_1 \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{s_1 + \Delta s_1 - s_1}{t_1 + \Delta t_1 - t_1}$$

$$= \lim_{\Delta t_1 \to 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}$$

= அத்துகளின் வேகமாகும்.

$\frac{ds}{dt}$ என்பதைப் பொதுவாக வேகம் v எனக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பிட்ட நேரத்திற்குரிய t இன் மதிப்பை $\frac{ds}{dt}$ இல் ஈடு செய்ய, அந்நேரத்திற்குரிய வேகம் கிடைக்கும். வேகம் என்பது தூரமாற்று விகிதம் (velocity is rate of change of distance) என நாம் அறிவோமாதலின், $\frac{ds}{dt}$ என்பது தூரமாற்று விகிதத்திற்குரிய வாய்பாடாகும். வேக மாற்று விகிதம் எனப் படும் வேக வளர்ச்சித் தகவு அல்லது முடுக்கம் (acceleration or the rate of change of velocity) என்பதை, முன்கூறிய அடிப் படையில் $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$ என முடுக்கத்திற்குரிய வாய் பாடாகக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $s = at + \frac{bt^2}{2}$ என்ற வாய்பாடு கொடுக்கப்பட்டால், (a, b மாறிலிகள் ; t விநாடிகள் அளவு)

$$\text{வேகம்} = \frac{ds}{dt} = a + bt \text{ எனவும்}$$

$$\text{முடுக்கம்} = \frac{d^2s}{dt^2} = b \text{ எனவும் பெறுகிறோம்.}$$

$s = ut + \frac{1}{2} f t^2$ என்ற வாய்பாடே, சற்று மாற்றி மேலே கொடுக்கப்பட்டிருப்பதைக் காண்க.

$u = a$; $f = b$.

(2) $s = 96t + 16t^2$ என்ற வாய்பாடுபடி,

$$\text{வேகம்} = \frac{ds}{dt} = 96 + 32t$$

$$\text{முடுக்கம்} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 32$$

ஒரு விநாடி முடிவில், வேகம் $96 + 32 = 128$ அலகுகள். முடுக்கம் கூட்டுக் குறி பெற்றிருப்பதால், வேகம் வளர்கிறது எனத் தெரிகிறது. முடுக்கம் ஒரு மாறிலி 32. $t=0$ அதாவது ஆரம்ப வேகம் $= 96$ அலகுகள். எனவே, இவ் வாய்பாட்டின் படி ஓடும் துகள், ஆரம்ப வேகம் 96 அலகுகளோடு ஆரம்பித்து 32 அலகுகள் மாருத முடுக்கத்தோடு வேகம் வளர்ந்து கொண்டே ஓடுகிறதென, நாம் கண்டவற்றிற்கு விளக்கம் கூறலாம்.

மாருக $s = 96t - 16t^2$ என இருப்பின்

$$\text{வேகம் } \frac{ds}{dt} = 96 - 32t$$

$$\text{முடுக்கம் } \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -32$$

$t=0$ ஆனுல், அதாவது புறப்படும் பொழுது வேகம் $96 - 32(0) = 96$ அலகுகள் வேகத்தோடு புறப்படுகிறது. முடுக்கம் குறைக்குறி பெற்றிருக்கிறபடியால் வேகம் குறைந்து கொண்டே போகிறது. குறையும் விகிதம் ஓர் மாறிலி -32 எனக் காணலாம். $t=3$, அதாவது மூன்று விநாடிகள் முடியும் போது வேகம் பூச்சியமாகிறது ; ஏனெனில் $96 - 32t = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $t=3$ எனக் காணலாம். அதன் பிறகும், அம் முடுக்கம் செயற்பட்டுக் கொண்டேயிருக்குமானுல், அத் துகள் செல்லும் திசை நேரெதிர் திசையாக மாறுகிறது.

[எடுத்துக்காட்டு : விநாடிக்கு 96 அடி வேகத்தில் நேர் உயரத்தில் வீசப்படும் ஒரு கல், புவியீர்ப்பு எதிர்ச்சக்தியின் காரணமாக பூமியை நோக்கி விநாடிக்கு 32 அடி முடுக்கத்தில் ஈர்க்கப்படுகிறது. முதல் விநாடி முடிவில் அதன் மேல் வேகம் விநாடிக்கு 64 அடி ; இரண்டாம் விநாடி முடிவில் அதன் மேல் வேகம் 32 அடி ; மூன்றும் விநாடி முடிவில் அதன் மேல் வேகம் பூச்சியமாக, கல் அவ்விடத்து ஒரு கண நேரம் அசைவற்று, பின்னர் புவியீர்ப்புச் சக்தியின் காரணமாக, திசைமாறி, 32 அடி முடுக்கத்தோடு கீழே விழ ஆரம்பிக்கிறது.]

(b) $s = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$ என்ற வாய்பாட்டின் அடிப்படையில் s உம், t உம் தொடர்பு பெறுமாயின், அதன் வேகம்

$$\frac{ds}{dt} = 2 + 6t + 12t^2$$

அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2s}{dt^2} = 6+24t$

எனப் பெறப்படும். tக்குரிய மதிப்பை இவ் வகைக்கெழுக் களில் ஈடு செய்தால், அந்தந்த, tக்குரிய நேரங்களில் வேக மும், முடுக்கமும் பெறப்படும்.

(c) தூரம் மட்டுமேயன்றி, பரப்புக்கள், கொள்ளளவுகள் முதலியன t என்ற நேரத்தோடு தொடர்பு படுத்தப் படலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு குளத்தில் ஒரு கல்லைப் போட் டால், ஒரு வட்டமேற்பட்டு, நேரமாக, நேரமாக அவ்வட்டத் தின் பரப்பு மாறுவதைக் (வளர்ந்து செல்வதை) காணலாம். ஒரு பலூனில் காற்று ஊதிக் கொண்டே வந்தால், அப் பலூன் தன் கொள்ளளவில் மாறுவதை (வளர்வதை)க் காணலாம்.

ஒரு குழாய் வழியாக வரும் தண்ணீரின் கொள்ளளவு நேரத்தைச் சார்ந்திருக்கிறது. எனவே, A, S, V என்பவை முறையே பரப்பு, மேற்பரப்பு, கொள்ளளவு என்பவற்றைக் குறிக்குமானால்,

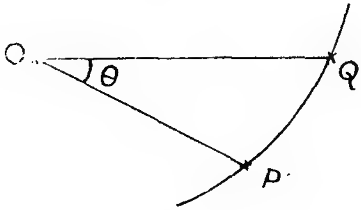
$A = f(t)$
$S = F(t)$
$V = \Psi(t)$ என எழுதலாம்.

பரப்பளவு வளரும் (குறையும்) வேகம் $\frac{dA}{dt}$;

மேற்பரப்பு வளரும் (குறையும்) வேகம் $\frac{ds}{dt}$;

கொள்ளளவு வளரும் (குறையும்) வேகம் $\frac{dV}{dt}$;

அவ்வாறே பின்வரும் படத்தில் OP என்ற நேர்க் கோட்டை



படம்

ஒரு நிலைத்த கோடாகக் கொள்க; ஒரு துகள் P இலிருந்து புறப்பட்டு, ஒரு வளைவரையின் மேல், t வினாடிகள் கழித்து Q

என்ற புள்ளிக்கு வருகிறதெனக் கொள்வோம். OP என்ற நிலையிலிருந்து 'θ' அளவுள்ள கோண அளவில் திரும்பி OQ என்ற நிலைக்கு வரும்போது $\theta = F(t)$ என ஒரு வாய்பாடு கிடைக்கலாம். அப்போது கோண வேகம் (Angular Velocity) $w = \frac{d\theta}{dt}$ எனவும் $\frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ எனவும் நாம் கண்டால், $\frac{d\theta}{dt}$ என்பது அத்துகளின் கோண வேகமெனவும் $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ என்பது அத்துகளின் கோண முடுக்கமெனவும் வரையறுக்கப்படலாம் என்பதைக் காண்க.

தொடர்புடைய வேகம்/மாறு வீதம்

(Related velocities/rates of change)

இப்போது ஒரு பலூனில் காற்று ஊதும்போது, அப்பலூனில் மேற்பரப்பளவும், கொள்ளளவும் ஒருங்கே வளர்கின்றன (மாறுகின்றன). இவ்விரண்டும் காற்று ஊதும் காலம் அல்லது நேரத்தைச் சார்ந்தவை.

அதாவது $S = F(t)$

$V = \Psi(t)$

என முன் கொண்ட வகையில்,

$\frac{dV}{dS} = \frac{\Psi'(t)}{F'(t)}$ எனக் காணலாமல்லவா ?

$\frac{dV}{dS}$ என்பது S ஐ ஒட்டி V வளரும் (மாறும்) விகிதம் எனக் கூறலாம். இவை போன்ற மற்றைய வகைக் கெழுக்களே தொடர்புடைய வேகம் அல்லது மாறுவீதம் என வரையறுக்கலாம்.

முன் வரையறுக்கப்பட்ட மாறுவீதங்களின் அடிப்படையில் சில கணக்குகள் பின்னர் செய்து காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு :-

1. ஒரு பொருள் $s = 12t + t^3$ என்ற வாய்பாட்டையொட்டிச் செல்கிறது. 3 விநாடிகள் முடிவில் அதன் வேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் காண்க. (s செ.மீ. தூரம் ; t காலம் விநாடிகளில்)

$s = 12t + t^3$

வேகம் $v = \dfrac{ds}{dt} = 12 + 3t^2$

முடுக்கம் $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 6t$

எனவே மூன்று விஞடி முடிவில் வேகம் $= 12 + 27$ $= 39$ செ.மீ. விஞடிக்கு.

முடுக்கம் $= 18$ செ.மீ. விஞடிக்கு விஞடி.

(2) ஒரு கோளத்தின் ஆரம் விஞடிக்கு 1 செ.மீ. வீதம் வளர்கிறது. அதன் ஆரம் 3 செ.மீ. ஆக இருக்கும்போது அதனுடைய (1) கொள்ளளவு, (2) பரப்பு வளரும் வீதத்தைக் காண்க.

t என்ற நேரத்தில் அக் கோளத்தின் ஆரம் r செ.மீ. ஆனல் $\dfrac{dr}{dt} = 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அப்போது அதன் கொள்ளளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; மேற்பரப்பு $S = 4\pi r^2$. நாம் $\dfrac{dV}{dt}$ யும் $\dfrac{ds}{dt}$ யும் காணவேண்டும்.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \frac{d}{dr}\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)\frac{dr}{dt}$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi . 3r^2 . \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$r = 3$, $\dfrac{dr}{dt} = 1$ ஆனல்,

கொள்ளளவு வளரும் வேகம் $= 4\pi \times 3^2 \times 1$

$= 36\pi$ க.செ.மீ. விஞடிக்கு.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4\pi r^2\right)$$

$$= \frac{d}{dr}\left(4\pi r^2\right)\frac{dr}{dt}$$

$$= 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$r=3,\ \frac{dr}{dt}=1$ ஆனால்,

மேற்பரப்பளவு வளரும் வேகம் $= 8\pi \times 3 \times 1$

$= 24$ ச.செ.மீ. வினாடிக்கு.

(3) ஒரு குளத்தில் ஒரு கல் எறியப்பட்டது. வெளிப்புறச் சிற்றலை (outermost ripple) வட்டவடிவமானது எனக் கொண்டால், அதன் ஆரம் வினாடிக்கு 3 செ.மீ. வளர்கிறது. ஆரம் 10 செ.மீ. ஆகவிருக்கும்போது அவ்வட்ட வடிவத்தின் பரப்பு வளரும் வேகம் காண்க.

t என்ற சமயம், அச் சிற்றலையின் ஆரம் r எனக் கொள்க.

$\frac{dr}{dt}=3$ செ.மீ. எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

அப்போது வட்டப் பரப்பு $A = \pi r^2$

எனவே வட்டப் பரப்பு வேகம் $= \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\ (\pi r^2)$

$$= \frac{d}{dr}\ (\pi r^2)\ \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi r\ \frac{dr}{dt}$$

$r=10,\ \frac{dr}{dt}=3$ என ஈடு செய்ய

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \times 10 \times 3$$

$= 60\ \pi$ ச.செ.மீ. வினாடிக்கு.

(4) ஒரு துகள் x அச்சின் மேல் $x=3t+\cos 3t$ என்ற வாய்பாட்டின்படி நகர்ந்து செல்கிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அதன் வேகம், முடுக்கம் காண்க. எந்த சமயங்களில் அதன் முடுக்கம் பூச்சியமாகுமென ஓர் வாய்பாட்டால் தருக.

$$x = 3t + \cos 3t$$

வேகம் $\frac{dx}{dt} = 3 - 3\sin 3t$

முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2} = -9\cos 3t$

(மேற்கண்ட இரண்டும்) t வினாடிகளில்

முடுக்கம் பூச்சியமாகும் சமயங்கள் $-9\cos 3t=0$ என்ற வாய்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகின்றது.

$\cos 3t=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்

$$3t = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$ எனப் பெறப்படும்.

(இங்கு n ஏதாவதொரு முழு எண்)

எனவே $t = \frac{2}{3}n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ என்ற வாய்பாட்டால் முடுக்கம் பூச்சியமாகும் சமயங்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன.

(5) t நேரத்தில் ஒரு துகள் செல்லும் தூரம் $s=a\cos t+b\sin t$ என்ற வாய்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது. அதன் வேகம் $\sqrt{a^2+b^2-s^2}$ எனவும் முடுக்கம் s எனவும் நிறுவுக.

$$s = a\cos t+b\sin t.$$

வேகம் $$\frac{ds}{dt} = -a\sin t+b\cos t$$

$$s^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a^2+b^2$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a^2+b^2-s^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2+b^2-s^2}$$

முடுக்கம் $$= \frac{d^2s}{dt^2} = -a\cos t-b\sin t$$

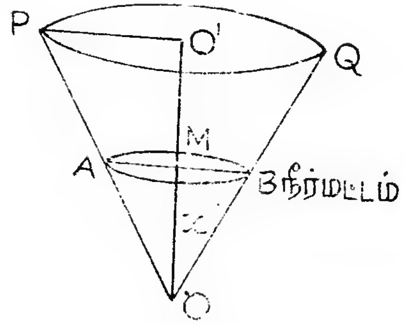
$$= -s.$$

(6) கூம்பு வடிவத்திலுள்ள ஒரு பாத்திரத்தில் விநாடிக்கு 10 க.செ.மீ. வீதம் தண்ணீர் ஊற்றப்பட்டுக் கொண்டேயிருக்கிறது. கூம்பின் உயரம் 12 செ.மீ.; ஆரம் 6 செ.மீ. 3 செ.மீ. உயரம் தண்ணீர் இருக்கும்போது தண்ணீர் மட்ட உயரம் வளரும் வேகம் காண்க.

படம் இல் காட்டியபடி குறிப்பிட்ட ஒரு சமயம் t இல் நீர்மட்ட உயரம் $OM=x$ செ.மீ. எனக் கொள்க. $x=3$ செ.மீ. உள்ளபோது $\frac{dx}{dt}$ காண வேண்டும்.

வடிவ கணிதப்படி

$$\frac{OM}{AM} = \frac{12}{6}$$



(படம்)

$$\therefore \quad AM = \tfrac{1}{2}\, OM$$
$$= \tfrac{1}{2}\, x.$$

எனவே அந்த மட்டத்தில், கூம்பின் உள்ள தண்ணீரின் கொள்ளளவு $= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 x$

$$= \frac{\pi}{12} x^3$$

$$\therefore \quad V = \tfrac{1}{12}\pi x^3$$

$\frac{dV}{dt} = 10$ க.செ.மீ. எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore \quad 10 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi x^3\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}\, \frac{d}{dx}(x^3)\, \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot 3x^2\, \frac{dx}{dt}$$

$$= x^2\, \frac{\pi}{4}\, \frac{dx}{dt}$$

$x=3$ என ஈடு செய்ய

$$10=\frac{9\pi}{4}\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{40}{9\pi}$$

நீர்மட்டம் உயரும் வேகம் $=\frac{40}{9\pi}$ செ.மீ. விஞடிக்கு.

பயிற்சி 5

I. பின்வருவன மரபான குறியீடுகளான, தூரம், நேரம் s, t இரண்டையும் இணைக்கும் வாய்பாடுகளாகும். பொதுவான வேகம், முடுக்கம் என்னவெனக் காண்க; மற்றேதும் வேண்டப்படின் அவற்றினையும் காண்க.

(1) $s=3t+12t^2$

(2) $s=15\cos t+5t^2$. எந்த சமயம் முடுக்கம் பூச்சியமாகிறது?

(3) $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ (u, f மாறிலிகள்)

(4) $s=48t+16t^3$; 1 விஞடி முடிவில் வேகம், முடுக்கம் காண்க.

(5) $s=9000t-500t^2$ எந்த சமயம் வேகம் பூச்சியமாகிறது?

(6) $s=a\cos\omega t-b\sin\omega t$......($\omega$ மாறிலி).

II. பின்கூறப்படுவனவற்றை வகைக் கெழுக் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுக.

(1) t விஞடிகளில் s தூரம் செல்லும் பொருளின் வேகம் $\sqrt{s}$ ஓடு நேர்விகிதம் பெற்றது.

(2) t விஞடிகளில் s தூரம் செல்லும் பொருளின் முடுக்கம் வேகத்தின் இருபடியோடு நேர்விகிதம் பெற்றது.

(3) t விஞடிகளில் $T°$ வெப்பம் பெறும் பொருளின், வெப்பம் பெறு வேகம், T ஓடு நேர்விகிதம் பெற்றது.

3. $y=x^2$ என்ற சார்பில் x இன் மதிப்பு 2 முதல் 2·5 வரை மாறும்போது, ஏற்படும் சராசரி y இன் மாறுவீதமென்ன? $x=2$ என்ற மதிப்பிற்கு y இன் மாறுவீதமென்ன?

4. ஒரு செவ்வக உலோகத் துண்டின் நீளம், அகலத்தைப் போல் இரு மடங்கு. அதன் பரப்பு விநாடிக்கு ·01 சதுர செ.மீ. வீதம் வெப்பத்தால் வளர்கிறது. அதன் நீளம் 10 செ.மீ. இருக்கும்போது அதன் நீளம் எந்த விகிதத்தில் வளர்கிறது?

5. ஒரு குளத்தில் ஒரு கல் எறியப்பட்டது. அதனால் ஏற்பட்ட வட்ட வடிவமான சிற்றலையின் ஆரம் விநாடிக்கு 8 செ.மீ. வீதம் வளர்கிறது. சிற்றலை ஆரம் 48 செ.மீ. இருக்கும்போது, அவ்வட்டப் பரப்பு வளரும் விகிதமென்ன ?

6. ஒரு வட்டத்தின் பரப்பு விநாடிக்கு K^2 சதுர செ.மீ. வேகத்தில் வளர்கிறது. அவ்வட்டத்தின் ஆரம் a செ.மீ. இருக்கும்போது, ஆரவளர்ச்சி வேகமென்ன ?

7. ஒரு துகளின் வேகம், அது சென்ற தூரத்தின் இருபடிக்கு நேர்விகிதமுடையது. அதன் முடுக்கம் சென்ற தூரத்தின் முப்படிக்கு நேர்விகிதமுடையதென நிறுவுக.

8. ஒரு கோளத்தின் கொள்ளளவு விநாடிக்கு 5 க.செ.மீ. வீதம் வளர்கிறது. அதன் ஆரம் 4 செ.மீ. ஆக இருக்கும்போது (1) மேற்பரப்பு வளரும் வேகம் என்ன? (2) ஆரம் வளரும் வேகம் என்ன ?

9. $y=x^2-2x+1$ என்ற சார்பில் $x=2$ என்ற இடத்தில் y இன் மாறுவீதம் என்ன ? அதே இடத்தின் தொடுவரையின் சரிவு விகிதமென்ன ?

10. மணல் ஒரு குழாய் வழியாக கீழே விழும்போது நிலத்தின் மேல் ஒரு கூம்பு வடிவத்தில் அமைகிறது. அக்கூம்பின் உயரமும், தரைமட்ட ஆரமும் சமமாயிருக்கிறது. மணல் விழும் வேகம் விநாடிக்கு 1000 கன செ.மீ. ஆனால் அக்கூம்பின் (1) ஆரம் (2) மேற்பரப்பு வளரும் விகிதமென்ன ?

11. ஒரு கூம்பின் வடிவில் ஒரு நீர்த்தொட்டியுள்ளது. மேல் மட்ட வட்டத்தின் விட்டமும், கூம்பின் உயரமும் 1 மீட்டர் சம அளவுள்ளவை. தண்ணீர் விநாடிக்கு 1000 க.செ.மீ. விழுகிறது. கூம்பில் நீர்மட்டம் 50 செ.மீ. இருக்கும்போது, நீர்மட்டம் உயரும் வேகமென்ன ?

12. மேற்கூறிய கூம்புத்தொட்டியை எடுத்துக் கொள்க. அதில் நீர்மட்டம் 25 செ.மீ. இருக்கும்போது, நீர்மட்டம் விநாடிக்கு 1 செ.மீ. வீதம் உயர்கிறது. அதில் நீர் வந்து விழும் கொள்ளளவு வேகமென்ன ?

13. மேற்கூறிய கூம்புத் தொட்டியை எடுத்துக் கொள்க. அதிலிருந்து நீர் விநாடிக்கு 500 க.செ.மீ. வீதம் வெளியே போகிறது. கூம்பில் நீர் நிறைய இருக்கும்போது நீர் மட்ட உயரம் மாறும் வேகம் என்ன? கூம்பில் நீர் மட்ட உயரம் 30 செ.மீ. இருக்கும்போது, நீர்மட்ட உயரம் மாறும் வேக மென்ன ?

14. 1·75 மீ. உயரமான ஒரு மனிதன் தரைமட்டத்தி லிருந்து 4 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு மின்சார விளக்குத் தண்டி லிருந்து விநாடிக்கு 2 மீட்டர் வேகத்தில் நடந்து செல்கிறான். அவனுடைய நிழல் நீளம் மாறும் வேகமென்ன? அவனுடைய நிழல் முனை இடம் பெயரும் வேகமென்ன ?

15. முன் கணக்கில் அம் மனிதன் விளக்குக்கு அப்பா லிருந்து விளக்கை நோக்கி 2 மீட்டர் வேகத்தில் வருகிறான். அவன் கம்பத்திலிருந்து 20 மீட்டர் தூரத்திலுள்ளபோது அவன் நிழல் நீளம் மாறும் வேகமென்ன ?

16. ஒரு மின்சார விளக்கைத் தாங்கும் கம்பம் 5 மீட்டர் உயரமுள்ளது. அக்கம்பத்தை நோக்கி ஒருவன் விநாடிக்கு 1·5 மீட்டர் வேகத்தில் வருகிறான். அவன் உயரம் 160 செ.மீ. அவன் கம்பத்திலிருந்து $8\frac{1}{3}$ மீட்டர் தூரத்தில் இருக்கும்போது, (1) அவன் நிழல் நீளம் மாறும் வேகமென்ன? (2) அவன் நிழல் முனை ஓடும் வேகமென்ன ?

சார்பில் மாறியில் ஏற்படும் ஒரு சிறு ஏற்றத்தின் (கூட்டு, குறை) காரணமாக, அச்சார்பில் ஏற்படும் மாற்றம்—தோராய மதிப்பு.

(The change in the value of the fuuction due to a small change in the independent variable an approximate value.)

$y = f(x)$ என்ற சார்பை எடுத்துக்கொள்வோம். x இல் ஏற்படும் ஒரு சிறு மாற்றம் Δx க்குரியதான y இல் ஏற்படும் மாற்றம் Δy எனக் கொள்க.

$$\underset{\Delta x \to o}{\text{எல்லை}} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$ என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே Δx மிகச் சிறியதாயிருப்பின் $\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$ (தோராயமாக) எனக் கொள்ளலாம்.

Δx மிகச் சிறிதாக, சிறிதாக தோராய மதிப்பும் சிறப் புறும்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $y = x^3$ எனக் கொள்வோம்

$y + \Delta y = (x+\Delta x)^3$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad \Delta y = x^3+3x^2\Delta x + 3\,(\Delta x)^2 x + (\Delta x)^3 - x^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 \Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= 3x^2 + 3x\,(\Delta x) + (\Delta x^2)$$

இதிலிருந்துதான், நாம் $\Delta x \to o$ ஆகும்போது $\frac{dy}{dx}$

$$= \underset{\Delta x \to o}{\text{எல்லை}} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே

எனவே (Δx) மிகச் சிறிதானல்

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = இன் மதிப்பு தோராயமாக $3x^2$ ஆகவிருக்கும்.

$\therefore \quad \Delta y = 3x^2\Delta x$ என்ற தோராய மதிப்பைப் பெறுகிறோம். $x = 2$ என்ற இடத்தில், x இன் மதிப்பு 0·001 அளவு அதிக மாகுமானல், y இன் மதிப்பில் ஏற்படும் உயர்வு

$= 3(2)^2 \; (\cdot 001) \qquad = \cdot 012$ (தோராயமாக)

இவ்வுயர்வு $x = 2$ என்ற இடத்திற்குரியது. அவ்வாறே $x = 2$ என்ற இடத்தில் x இன் மதிப்பு .001 குறையுமானல், அதாவது இங்கு $\Delta x = -0{\cdot}001$ எனக் கொண்டால், y இன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுதல் $= 3\,(2)^2\,(-{\cdot}0001)$

$= -\cdot 012$

இக்குறைவும் $x = 2$ என்ற இடத்திற்குரியது. குறைக்குறி விளக்குவது என்னவெனில் y இன் மதிப்பு அந்த அளவுக்குத் தோராயமாகக் குறைகிறதென்பதைத்தான் ($x=2$ என்ற இடத்

தில்) ஆகவே x இன் மதிப்பு மிகைப்படின், மிகைப்படும் அளவை + குறியிட்டு, $\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$ என்ற வாய்பாட்டில் பயன்படுத்த வேண்டும். x இன் மதிப்பு குறைபடின், குறைபடும் அளவை — குறியிட்டு $\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$ என்ற வாய்பாட்டில் பயன்படுத்த வேண்டும்.) இப்போது Δx கூட்டு மதிப்பு பெற்று குறிப்பிட்ட இடத்தில் $\frac{dy}{dx}$ குறைக் குறியுடையதாயின் $\Delta y = (+) \times (-)$ என, ஒரு குறைமதிப்பு பெறப்படும். பின் வரும் தொகுதியைக் கண்டு புரிந்து கொள்க.

Δx + அல்லது —	$\frac{dy}{dx}$ + அல்லது — (அந்த இடத்தில்)	Δy மதிப்பு
+	+	+ y அதிகமாகும்
+	—	— y குறையும்
—	+	— y குறையும்
—	—	+ y அதிகமாகும்

எடுத்துகாட்டு : 1

(1) $y = x^3 - 9x^2 + x + 6$

(2) $x = 3$ என்ற இடத்தில் y இன் மதிப்பு
$= 27 - 81 + 3 + 6 = -45$

இங்கு x இன் மதிப்பு ·01 மிகைப்படின் ($\Delta x = + \cdot 01$)

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x = (3x^2 - 18x + 1) \Delta x$$
$$= (27 - 54 + 1)(\cdot 01) = -\cdot 26$$

$x = 3{\cdot}01$ க்குரிய

y இன் மதிப்பு $= -45 - \cdot 026$
$= -45{\cdot}026$ (தோராயமாக)

அவ்வாறே x இன் மதிப்பு ·01 குறைபடின்
($\Delta x = - \cdot 01$)

$$\Delta y = (27 - 54 + 1)(- \cdot 01)$$
$$= + 0{\cdot}26$$

$\therefore \quad x = 2{\cdot}99$ க்குரிய

y இன் மதிப்பு $= -45 + {\cdot}026$

$= -44{\cdot}976$

பின் வருவதைக் காண்க :

x	2·99	3	3·01
y தோராய மதிப்பு	−44·976	−45	−45·026

எனவே x இன் மதிப்பு 2·99 இலிருந்து 3·01 க்கு வளரும் போது, y இன் மதிப்பு (இயற்கணித முறையில்) குறைகிறது. ஆகவே இச்சிறிய இடைவெளியில் y என்ற சார்பு ஒரு குறையும் சார்பு எனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக் காட்டு.

ஒரு சதுரத்தின் பக்கம் 10 செ. மீ. அப்பக்கங்களை அளப்பதில் 0·01 செ. மீ பிழை இருக்குமாயின், சதுரப் பரப்பில் தோராயமாக என்ன பிழை ஏற்படும்?

A – பரப்பு

x – சதுரத்தின் பக்கம் எனக்கொள்க.

$A = x^2$

$\therefore \quad \Delta x$ என்ற x இல் ஏற்படும் பிழைக்கு

$$\Delta A = \frac{dA}{dx}\,\Delta x$$

$$\Delta A = 2\Delta x$$

இங்கு $x = 10$; $\Delta x = {\cdot}01$

$$\Delta x = 20 \times {\cdot}01$$

$= 0{\cdot}2$ சதுர செ மீ.

இங்கு 0·01 என்பது கூடுதல் பிழையாயின், (அதாவது 10 செ. மீ. என்பது அதிகமான அளவு, சரியான அளவு 9·99 செ. மீ.)

A இன் மதிப்பு கூடுதல் பிழைபடும். எனவே சரியான பரப்பு, $100 - {\cdot}2$

$= 99{\cdot}8$ ச. செ. மீ. (தோராயமாக)

மாருக 0·01 என்பது குறை பிழையாயின், (அதாவது 10 செ. மீ. என்பது குறையான அளவு, சரியான அளவு 10·01 செ. மீ.)

A இன் மதிப்பு குறை பிழைபடும். எனவே சரியான பரப்பு, $100 + .02 = 100 \cdot 02$ ச. செ. மீ. (தோராயமாக)

பயிற்சி 5

(1) $y = x^6 - x^2$ என்பதோர் சார்பு ; $x = 5$ என்ற இடத்தில் x ஆனது ·005 மிகைப்படின் y இன் மதிப்பில் ஏற்படும் தோராய மாற்றமென்ன ?

(2) $y = 1 - \cos x$ என்பதோர் சார்பு ; $x = \frac{\pi}{2}$ என்ற இடத்தில் x ஆனது (a) ·001 ஆரையன் மிகைபடின் (b) ·002 ஆரையன் குறைபடின், y இன் மதிப்பில் ஏற்படும் தோராய மாற்றமென்ன ?

(3) ஒரு கன சதுரத்தின் பக்கம் 15 செ· மீ., பக்க மளப்பதில் கூடுதல் பிழை ·001 செ. மீ. ஆனல் கொள்ளளவில் ஏற்படும் தோராயமான பிழையென்ன ?

VI. தொகை நுண் கணிதம்

(Integral Calculus)

தொகை காணல்

(integration)

6.0 வகை நுண் கணிதத்தின் தலைகீழ் மாற்றுமுறையே தொகை நுண் கணித முறையாகும்.

6·1 தொகை நுண் கணிதத்தின் நோக்கம்: ஒரு சார்பின் வகைக் கெழு $f(x)$ எனக் கொள்வோம். $f(x)$ஐ வகைக்கெழுவாகக் கொண்ட முதற் சார்பு யாது எனக் காண்பதே தொகை நுண் கணிதத்தின் நோக்கமாகும்.

வரையறை: $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ ஆனால், $F(x)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு தொகையாகும். அதை எழுதும் மரபு $\int f(x)\,dx = F(x)$ என்பதாம். இதைப் படிப்பது 'தொகை $f(x)dx = F(x)$' என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\int nx^{n-1}\,dx = x^n.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x.$$

$$\int -\sin x\,dx = \cos x.$$

இங்கு $\int f(x)\,dx = F(x)$ எனக் கூறும்போது, $f(x)$ என்பது தொகுக்கப்படும் சார்பு எனவும், (the function to be integrated) $F(x)$ என்பது தொகை எனவும், (the Integral), x என்பது தொகைக்குரிய மாறி (variable) எனவும் கூறப்படும்.

வகை நுண் கணிதத்தில் '$\frac{d}{dx}\left[\quad\right]$' என்ற குறியீடு ஒரு சார்பின் x ஒட்டிய வகைக் கெழுவைக் காணும் செயலைக் குறிப்பது போல, '$\int \ldots\ldots dx$' என்ற குறியீடு ஒரு சார்பின் x ஒட்டிய தொகையைக் காணும் செயலைக் குறிக்கிறது. $\int f(x)\,dx$ என்று எழுதுவதில் 'dx' என்பது $f(x)$ ஐப் பெருக்கும் ஒரு இராசியல்ல; 'x ஒட்டிய தொகை காண வேண்டும்' என்ற பொருளைத்தான் 'dx' குறிக்கிறது.

குறிப்பு: $\int$ என்ற குறியீடு S என்ற குறியீட்டின் சிதைவு; S என்பது கூட்டுத் தொகையைக் குறிப்பது; $\int$ என்பதும் ஒரு கூட்டுத் தொகையைத்தான் குறிக்கிறதென்பது பின்னர் மேல் பட்டப்படிப்பில் காண்க.

6·2 அளவுபடாத தொகை (Indefinite Integral):

c என்பது ஏதாமொரு மாறிலி எனவும் $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ எனவும் கொள்வோம். அப்போது வகைக்கெழு முறைப்படி,

$\frac{d}{dx}\,[F(x)+c]$ உம் $f(x)$ தான்; ஏனெனில் c என்ற மாறிலிக்கு வகைக்கெழுவில்லை. [ஏனெனில் $\frac{d}{dx}$ (மாறிலி) $= 0$]

எனவே $\int f(x)dx = F(x)$ என எழுதினாலும்

$\int f(x)dx = F(x)+c$ என எழுதினாலும் 6·1 இல் வகுத்த வரையறைப்படி இரண்டும் சரியான விடைகளே யாகும்.

எனவேதான், 6·1 இல் (வரையறை) கூறியபடி,

(i) $\int f(x)dx = F(x)$ என்பது ஒரு தொகையாகும். (ஒரு என்பது குறிப்பிடற்குரியது).

(ii) $\int f(x)dx = F(x) + C$ என்பது பொதுவான தொகையாகும். C என்பது ஏதாமொரு மாறிலியாக இருக்கக்கூடுமாதலால் இது அளவுபடாத தொகை எனக் கூறப்படும். C என்பது தொகை காண்பதில் வரக்கூடிய மாறிலி.

இதுவரை கூறப்பட்டதிலிருந்து $\frac{d}{dx}$ என்ற செயலியும் $\int \dots \dots \dots dx$ என்ற செயலியும் ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழ் மாற்றச் செயலிகளாக ஏற்றுக் கொள்ளப்படலாம். அதே போல் D உம் D^{-1} உம் தலைகீழ் மாற்றச் செயலிகளாம். [D^{-1} உம் $\int$ உம் ஒரே செயலைக் குறிக்கும் எனக் காண்க; அதாவது $D^{-1}[f(x)] = \int f(x)dx$ என்பது பொருத்தம்].

எனவே $f(x)$ என்ற சார்பு, $F(x)$ இன் முதல் வகைக் கெழுவானால், $\int f(x)dx = F(x) + C$ எனக் கூறலாம். சில சமயங்களில் C என்பது எழுதப்படாவிட்டாலும், C என்பது காணப்பட்ட தொகையான $F(x)$ ஓடு கூட்டப்படவேண்டுமென்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

6·21 தொகை காணப் பயன்படும் சில வாய்பாடுகள் :

1. $\int 0$ (பூச்சியம்) $dx = c$ மாறிலி.

ஏனெனில் $\frac{d}{dx}[c$ மாறிலி$] =$ பூச்சியம்.

2. K ஒரு மாறிலியாயின்,

$\int kdx = kx + c$ என எளிதில் காணலாம். ஏனெனில் $\frac{d}{dx}[kx + c] = V$.

3. $\int f(x)dx = F(x)$ ஆனால், a ஒரு மாறிலியாயின், $\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx = a F(x)$ என்பது பொருத்தம்.

ஏனெனில் $\frac{d}{dx}[F(x)dx] = f(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\text{எனவே } \frac{d}{dx}[a F(x)] = a \frac{d}{dx}[F(x)]$$

$$= a f(x).$$

$$\therefore \int a f(x)dx = a F(x) = a \int f(x)\, dx$$

அங்கங்கு ஓரோர் மாறிலி C ஐக் கூட்டிக் கொள்ளளலாம்.

4. $u, v, w, \ldots\ldots$ என சில x ஒட்டிய சார்புகள் இருப்பின், $\int (u \pm v \pm w \ldots\ldots)dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx + \ldots\ldots$ என்பது பொருத்தம்.

ஏனெனில் 5·1 இல், நாம் கண்டபடி, $\frac{d}{dx}[u_1] = v$ எனவும், அதாவது $\int udx = u_1$ எனவும் $\frac{d}{dx}[v_1] = v$ எனவும், அதாவது $\int vdx = v_1$ எனவும் .... கொண்டால்

$\frac{d}{dx}[u_1 \pm v_1 \pm w_1 \ldots\ldots] = u \pm v \pm w$ .... என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore \int (u \pm v \pm w \pm \ldots\ldots\ldots)\, dx + u_1 \pm v_1 \pm w_1 \pm \ldots\ \ldots = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx \pm \ldots\ldots$$ என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே, சில சார்புகளின் கூட்டு, கழித்தல் மதிப்புக்கு நாம் தொகை காண வேண்டின், ஒவ்வொரு சார்பையும் எடுத்து, அதன் தொகை கண்டு, உரிய கூட்டல், கழித்தல் செய்து, தொகை காண வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$\int nx^{n-1} = x^n$ எனவும்

$\int \cos x\, dx = \sin x$ எனவும் நமக்குத் தெரிகிறது.

$$\therefore \quad \int (nx^{n-1} + \cos x)\, dx = \int nx^{n-1} dx + \int \cos x\, dx$$

$$= x^n + C_1 + \sin x + C_2$$

$$= x^n + \sin x + C$$ என தொகை காண்கிறோம்.

6·22 எடுத்துக்காட்டுகள்—தொகை வாய்பாடுகள் :

1. வாய்பாடு $\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ($m = -1$ விலக்கு)

$\int nx^{n-1}\, dx = x^n$ என்பது நமக்குத் தெளிவாகத் தெரிகிறது.

இவ்வாய்பாடு, $n=0$ என்ற மதிப்புக்குத் தவிர, மற்றெல்லா, கூட்டு, குறை முழு எண், கூட்டு, குறை பின்னங்களுக்குப் பொருத்தமாகும். எனவே, முன் 6·21(3) இல் கூறப்பட்ட படி,

$\int nx^{n-1}\, dx = n \int x^{n-1}\, dx = x^n$ என்பது தெரிகிறது.

$\therefore \quad \int x^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n}$ ஆகும்.

இங்கு $n = m+1$ எனக் கொண்டால்,

$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ என்ற தொகை வாய்பாடு பெறப்படும்.

($m = -1$ க்கு மட்டும் பொருந்தாது. பின் குறிப்பு காண்க.)

குறிப்பு : $m = -1$ ஆனால், வாய்பாட்டின் படி,

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^0}{\text{பூச்சியம்}}$$

$$= \frac{1}{\text{பூச்சியம்}}.$$

என்ற ஒரு புதிரான தொகை பெறப்படுகிறது. எந்த ஒரு எண்ணையும் பூச்சியத்தால் வகுத்தால் ஒரு திட்டமான தொகை வராது.

எனவே தான் முதலிலேயே $n=0$ க்கு விலக்களிக்கப் பட்டது; எனவே, $n=m+1$ எனக் கொள்ளும்போது $n=0$ க்குரிய $m=-1$ க்கு விலக்களிக்கப்பட வேண்டும்: இதற்குரிய விளக்கமும் $\int \frac{1}{x} dx$ இன் மதிப்பும் மேற்படிப்பில் காண்பீர்கள்].

2. வாய்பாடு :

$\int \cos x\, dx = \sin x$ என்பது தெளிவு.

3. வாய்பாடு :

$\int \sin x\, dx = -\cos x.$

வகைக்கெழுபடி $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$ என்ற காரணத்தால் $\int -\sin x\, dx$ எனத் தெரிகிறது.

$$\text{ஆனால் } \int \sin x\, dx = (-1)\int -\sin x\, dx$$
$$= (-1)\cos x.$$
$$= -\cos x \text{ என நிறுவப்படுகிறது.}$$

4. வாய்பாடு :

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} \; [m=-1 \text{ விலக்கு}]$$

விளக்கம் :

$\frac{d}{dx}[(ax+b)^n] = na(ax+b)^{n-1}$ என நாம் முன்னர் பார்த்திருக்கிறோம்.

$$\text{எனவே} \quad \int na\,(ax+b)^{n-1}\,dx = (ax+b)^n$$

$$\therefore \quad na\int (ax+b)^{n-1}\,dx = (ax+b)^n.$$

$$\therefore \quad \int (ax+b)^{n-1}\,dx = \frac{(ax+b)^n}{na}$$

$n = m+1$ என ஈடு செய்ய,

$\int (ax+b)^m \, dx = \dfrac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}$ எனப் பெறப்படும் ($m = -1$ விலக்கு).

5. வாய்பாடு :

$$\int \cos (ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin (ax+b).$$

விளக்கம் : $\dfrac{d}{dx} [\sin (ax+b)] = \dfrac{d}{du} (\sin u) \dfrac{du}{dx}$ $[u = ax+b]$

$$= \cos u . a$$

$$= a \cos (ax+b).$$

$$\therefore \int a \cos (ax+b) \, dx = \sin (ax+b)$$

$$\therefore \int \cos (ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin (ax+b).$$

6. வாய்பாடு :

$\int \sin (ax+b) \, dx = -\dfrac{1}{a} \cos (ax+b).$ விளக்கம் (5) இல் உள்ளபடியே.

சிறப்பாக $b=0$ ஆனால்

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax.$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax.$$

என்ற வாய்பாடுகளும் பல இடங்களில் பயன்படும்.

7. வாய்பாடு :

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

இங்கு u என்பது x இன் ஒரு சார்பு.

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right] = \frac{d}{du} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right] \frac{du}{dx}.$$

$$= \frac{1}{n+1} (n+1) u^n \frac{du}{dx}$$

$$= u^n \frac{du}{dx}.$$

$\therefore \quad \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ என்ற சார்புக்கு x ஐ ஒட்டிய வகைக்கெழு கண்டால், அதன் முதல் வகைக் கெழு $= u^n \dfrac{du}{dx}$ எனப் பெறப்படுகிறது.

எனவே $\displaystyle\int \left\{u^n \frac{du}{dx}\right\} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}$.

இதன் விளக்கம், சில எடுத்துக் காட்டுகளால் பின்னர் தெளிவுறும்.

6.23 எடுத்துக் காட்டுகள் : தேவையான இடங்களிலெல்லாம் c என்ற ஒரு மாறிலி கூட்டிக் கொள்க.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^2+1}{x^2}\, dx$ காண்க.

$$\frac{x^4-x^2+1}{x^2} = x^2-1+\frac{1}{x^2}$$

$$= x^2-1+x^{-2}$$

$$\therefore \int \frac{x^4-x^2+1}{x^2}\, dx = \int (x^2-1+x^{-2})\, dx.$$

$$= \int x^2\, dx + \int -1\, dx + \int x^{-2}\, dx.$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^{-1}}{-1}.$$

$$= \frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{x}.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x}}\, dx$ காண்க.

$$\frac{2x-1}{\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x}} dx = \int 2x^{\frac{1}{2}}\, dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

$$= 2\int x^{\frac{1}{2}}\, dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$2 = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{2\times 2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}.$$

(3) $\int (b-ax)^n \, dx$ காண்க.

நமக்கு $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}$ எனத் தெரியும். இங்கு அவ் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தினுல்

$$\int (b-ax)^n \, dx = \frac{(b-ax)^{n+1}}{(n+1)(-a)}$$

$$= -\frac{(b-ax)^{n+1}}{(n+1)a}$$

எனக் கிடைக்கும்.

(4) $\int \cos 3x \, dx$ காண்க.

நமக்கு $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$ எனத் தெரியும். (வாய்பாடு 5·22 (6))

$$\therefore \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \sin 3x,$$

(5) $\int \cos^2 ax \, dx$ காண்க.

இதை நேரடியாகக் காண நமக்கு ஏதும் வாய்பாடில்லை. ஆனல் $\cos 2ax = 2\cos^2 ax - 1$ என நமக்குக் கோண கணிதத்தில் தெரியும்.

$$\therefore \cos^2 ax = \frac{1+\cos 2ax}{2}$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \int \frac{1+\cos 2ax}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 1 \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 2ax \, dx.$$

$$= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}.\ \frac{1}{2a}\sin 2ax.$$

$$= \tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax.$$

(6) $\int \sin mx \sin nx\ dx.$

இதனை நேரடியாக வாய்பாடு கொண்டு காண இயலாது. ஆனால்,

$\cos D - \cos C = 2\sin \dfrac{C+D}{2}.\ \sin \dfrac{C-D}{2}.$ என்ற கோண கணித வாய்பாடு கொண்டு அல்லது அதன் மற்றொரு அமைப்பான,

$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B.$ என்ற வாய்பாடு கொண்டு

$\tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] = \sin mx \sin nx$ என எழுதலாம்.

எனவே $\int \sin mx \sin nx\ dx$

$$= \tfrac{1}{2}\int [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\ dx.$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \cos(m-n)x\ dx - \tfrac{1}{2}\int \cos(m+n)x\ dx.$$

$$= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$$

எனப் பெறலாம்.

குறிப்பு :

இங்கு சிறப்பாக, $m=n$ எனக் கொண்டால்

தொகை $= \tfrac{1}{2}\int \cos(0)\ x\,dx - \tfrac{1}{2}\int \cos 2mx\ dx$

$$= \tfrac{1}{2}\int 1\ dx - \tfrac{1}{2}.\ \frac{1}{2m}\sin 2mx$$

$= \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4m}\sin 2mx$ எனப் பெறலாம். அல்லது நேரடியாக

$$\int \sin mx.\ \sin mx\ dx = \int \sin^2 mx\ dx.$$

$$= \int \frac{1-\cos 2mx}{2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2mx\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin 2mx.$$

எனவும் பெறலாம்.

இவ்வாறே

(i) $\int \sin mx \cos nx\, dx$

(ii) $\int \cos mx \cos nx\, dx.$

என்ற தொகைகளையும் பெறலாம். இங்கு

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin (m+n)x + \sin (m-n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos (m+n)x + \cos (m-n)x]$$

என்ற வாய்பாடுகள் பயன்படும்.

(7) $\int \cos 3x \cos x\, dx$ காண்க.

சென்ற கணக்கு மாதிரியே

$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos (A-B)$ என்ற கோண கணித வாய்பாடு கொண்டு

$$\cos 3x \cos x = \frac{1}{2}[\cos (3x+x) + \cos (3x-x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 2x]$$

எனக் காணலாம்.

$$\therefore \int \cos 3x.\ \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 2x)\, dx.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int (\cos 4x + \cos 2x)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 4x}{4}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right].$$

$$= \frac{1}{8}[\sin 4x + 2 \sin 2x]$$

எனப் பெறலாம்.

(8) $\int \sin 3x.\ \cos 2x.\ \cos x\, dx$ காண்க.

இங்கு இருமுறை கோண கணிதக் கூட்டல்—பெருக்கல் வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\cos ax$, $\sin ax$ என்ற அமைப்பில் தோன்றும் உறுப்புக்களைப் பெறவேண்டும்.

$$2\cos 2x \cos x = \cos(2x+x)+\cos(2x-x)$$
$$= \cos 3x+\cos x$$
$$\sin 3x \cos 2x \cos x = \sin 3x\left[\frac{\cos 3x+\cos x}{2}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\sin 3x\cos 3x+\sin 3x\cos x]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}\sin 6x+\tfrac{1}{2}\{\sin 4x+\sin 2x\}]$$
$$= \tfrac{1}{4}\sin 6x+\tfrac{1}{4}\sin 4x+\tfrac{1}{4}\sin 2x$$
$$\therefore \int \sin 3x\cos 2x\cos x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int(\sin 6x+\sin 4x+\sin 2x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int \sin 6x\,dx+\tfrac{1}{4}\int \sin 4x\,dx+\tfrac{1}{4}\int \sin 2x\,dx.$$
$$= -\tfrac{1}{24}\cos 6x-\tfrac{1}{16}\cos 4x-\tfrac{1}{8}\cos 2x.$$

(9) $\int \cos^3 x\,dx$ காண்க.

$\cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore \cos^3 x = \frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$
$$\int \cos^3 x\,dx = \tfrac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\int \cos 3x\,dx+\tfrac{3}{4}\int \cos x\,dx.$$
$$= \tfrac{1}{12}\sin 3x+\tfrac{3}{4}\sin x.$$

(10) $\int \sin^4 x\cos x\,dx$ காண்க.

$u=\sin x$ என வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{du}{dx} = \cos x.$$
$$\therefore \int \sin^4 x\cos x\,dx = \int u^4\frac{du}{dx}$$
$$= \frac{u^5}{5} \quad \text{[வாய்பாடு 5·22 (7)]}$$
$$= \tfrac{1}{5}\sin^5 x.$$

6·3 தொகை காண்பதில் தோன்றும் மாறிலி :

$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ ஆனால்,

பொதுவாக $\int f(x)\,dx = F(x) +$ ஒரு மாறிலி என எழுதலா மெனக் கண்டோம்.

சில கணக்குகளில், சார்புகளைப் பற்றிய சில விபரங்கள் கொடுக்கப்படுமானால் அந்த 'ஏதாமொரு மாறிலியை' நாம் ஒரு திட்டமான மாறிலியாகக் கண்டு பிடிக்கலாம். சில எடுத்துக் காட்டுகள் அம்முறைகளை விளக்கும்.

6·31 எடுத்துக்காட்டு :

1. ஒரு சார்பின் வளைவரையின் (x, y) என்ற இடத்தில் அதன் சரிவு $=\left(=\frac{dy}{dx}\right) 3x^2-x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அவ்வளைவரை (2, 10) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது. அவ் வளைவரையின் சமன்பாடு காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - x$$

$$\text{எனவே } y = \int (3x^2 - x)\,dx$$

$$= x^3 - \frac{x^2}{2} + C.$$

இவ் வளைவரை (2, 10) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறபடியால்

$$10 = 8 - \frac{4}{2} + C.$$

$$\therefore \quad C = 4$$

$$y = x^3 - \frac{x^2}{2} + 4.$$

இங்கு இவ்வளைவரை (2, 10) வழியாகச் செல்லுகிறது என்ற விபரம் கொண்டு $C=4$ எனப் பெறப்படுகிறது.

2. ஒரு துகள் விநாடிக்கு 80 செ.மீ. வேகத்தில் ஓட ஆரம்பிக்கிறது. அதன் முடுக்கம் விநாடிக்கு விநாடி 10 செ.மீ. என்றால், 10 விநாடிகளில் அதன் வேகமென்ன? 10 விநாடிகளில் புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து அது ஓடிய தூரமென்ன?

முடுக்கம் $= \dfrac{dv}{dt} = 10$ செ.மீ.

$$\therefore \quad v = \int 10\, dt$$

$$= 10t + C.$$

இங்கு $t=0$ ஆக இருக்கும்போது, அதாவது தொடக்கத்தில் $v=80$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore \quad 80 = 10 \times 10 + C$$

$$C = 80$$

$\therefore \quad v = 10t + 80$ என திட்டமான மாறிலியோடு, எந்த நேரத்திற்கும் உரிய வேகம் பெறப்படுகிறது.

மேலும், செல்லும் தூரம் s ஆனால்

$$v = \frac{ds}{dt} = 10t + 80$$

$$\therefore \quad s = \int (10t + 80)\, dt$$

$$= 5t^2 + 80t + C_1$$

ஆனால் $t=0$ ஆக இருக்கும்போது $s=0$

$$\therefore \quad 0 = 0 + 0 + C_1$$

$$\therefore \quad C_1 = 0$$

$$\therefore \quad s = 5t^2 + 80t$$

எனவே 10 விநாடிகளில் வேகம் $v = 10 \times 10 + 80$

$= 180$ செ.மீ. விநாடிக்கு

10 விநாடிகளில் சென்ற தூரம்

$s = 5\,(10)^2 + 80\,(10)$

$= 1{,}300$ செ.மீ.

பயிற்சி 6

பின் வருவனவற்றிற்கு x ஒட்டிய தொகை காண்க.

1. $3x^4$
2. $1 - 3x + x^2$
3. $(4x+3)^5$
4. $(3-4x)^6$
5. $(1-3x)^n$

6. $\dfrac{1}{(2x-1)^2}$

7. $\dfrac{1}{(ax+b)^n}$

8. $(x+1)^3-4(x+1)^2 + \dfrac{2}{(x+1)^2}$

9. $\dfrac{x^4+3x^3-4x^2+7}{x^2}$

10. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}}$

11. $u^5 \dfrac{du}{dx}$

12. $\dfrac{1}{u^2} \dfrac{du}{dx}$

13. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$

14. $\sin 2x$

15. $\cos 6x - \cos 5x$

16. (a) $\sin(3x-4)$

(b) $\cos(1-2x)$

(c) $3\sin\dfrac{x}{2}$

(d) $m\sin\dfrac{x}{m}$

(e) $\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{x}{u}$

17. $\sin^2 x$

18. $\sin 3x . \sin x$

19. $\cos^3\left(\frac{x}{3}\right)$

20. $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

21. $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

22. $\cos x \cos 2x \cos 3x$

23. $\cos^4 x \sin x$

24. $\sin^3 x \cos x$

25. $\sin^b x \cos x$

26. $\cos^3 ax. \sin ax$

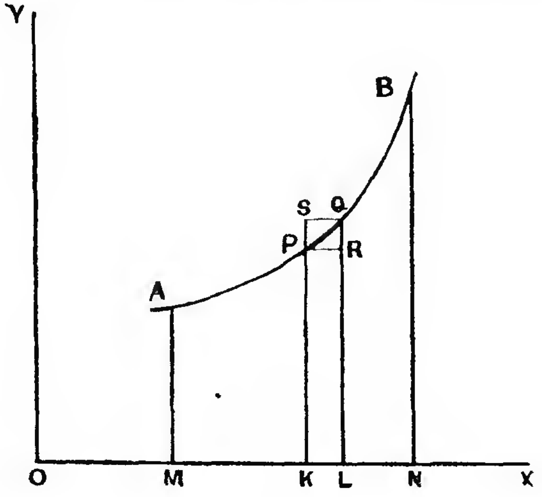
VII. தொகை காணல் - பயன்படு மிடங்கள் பரப்புகள் - கொள்ளளவுகள்

(Integration - applications - Areas - Volumes)

ஒரு தளவளை வரைகள் — பரப்புகள்

(Areas of Plane Curves)

7·1 $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவரைப்பகுதி AB என படம் 7·1 இல் வரையப்பட்டுள்து. AM, BN என முறையே



படம் 7·1

A இலிருந்தும் B இலிருந்தும் OX க்குக் குத்துக்கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.

$OM = a$ (A யின் x ஆயத்தொலை)

$ON = b$ (B யின் x ஆயத்தொலை)

தொகை காணல் முறையைக் கையாண்டு $MNBA$ என்ற பகுதியின் பரப்பினைக் காணும் முறையினைப் பார்ப்போம். (i) $y = f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவரை ; (ii) x அச்சு (iii) $x = a$, $x = b$ என்ற குத்துக்கோடுகளால் இப்பரப்பு $MNBA$ வரம்பிடப்பட்டது என்று கூறலாம்.

வளைவரையின்மேல் $P(x, y)$ எனவும், $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ என்ற இரு புள்ளிகளையெடுத்து x அச்சுக்கு முறையே PK, QL என்ற குத்துக்கோடுகள் வரைக.

$KLRP$ என்ற செவ்வகமும், $KLQS$ என்ற செவ்வகமும் படத்தில் காட்டியபடி வரைக.

இப்பொழுது $OK = x$; $OL = x + \Delta x$

$\therefore$ $KL = \Delta x$ ஆகும்.

(i) வளைவரை AP, (ii) நேர்கோடு MK, (iii) $x = a$, $x = x$ என்ற புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட குத்துக்கோடுகள் MA, KP என்பவற்றால் வரம்பிடப்பட்ட பரப்பு Z என்க் கொள்க. Z இன் மதிப்பு K யின் இடத்தை, அதாவது x இன் மதிப்பைச் சார்ந்திருக்குமென்பது தெளிவு —அதாவது,

$Z = MKPA = F(x)$ எனக் கொள்ளலாம். x இன் மதிப்பு Δx ஏற்றம் பெறுங்கால், முன் கூறியவாறாகக் கொள்ளப்பட்ட பரப்பு $Z + \Delta Z = MLQA = F(x + \Delta x)$ எனக் கொள்ள லாம். எனவே $\Delta Z =$ பரப்பு $KLQP$ (QP ஒரு சிறு வளைவரை வில்- நேர்க்கோடல்ல) $= F(x + \Delta x) - F(x)$

$KLQP$ இன் பரப்பு செவ்வகம் $KLRP$ இன் பரப்பைவிட அதிகம் ; செவ்வகம் $KLQS$ இன் பரப்பைவிட குறைவு.

$\therefore \quad \Delta Z > KP \cdot KL$

அதாவது $\quad > f(x)\,\Delta x$

$\Delta Z < KS \cdot KL$

அதாவது $\quad < f(x + \Delta x)\Delta x.$

$\therefore \quad f(x)\,\Delta x < \Delta Z < f(x + \Delta x)\,\Delta x$

Δx ஆல் யாவற்றையும் வகுத்தால்

$$f(x) < \frac{\Delta z}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

இப்போது $\Delta x \to o$ ஆகும்போது.

$\frac{dz}{dx} = f(x)$ எனப் பெறப்படுகிறது. எனவே, z என்பது x இன் ஒரு சார்பாகவும், அச்சார்பின் முதல் வகைக்கெழு $f(x)$ ஆகவும் பெறப்படுகிறது.

$\therefore \quad Z = \int f(x)\, dx$ என்றோ அல்லது

$Z = \int f(x)\, dx + C \qquad (C$ - மாறிலி$)$ என்றோ கொள்ளலாம்.

எனவே $\int f(x)\, dx = F(x)$ எனக் கொண்டால் $Z = F(x) + C$ எனப் பெறப்படுகிறது. $x = a$ என எடுத்துக்கொண்டால் PK யும் AM உம் இணைந்துவிடும்.

அப்போது பரப்பு = பூச்சியம்.

எனவே $0 = F(a) + C$.

$\therefore \qquad C = -F(a)$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே $Z = F(x) - F(a)$ ஆகும். (அதாவது M முதல் K வரை உள்ள பரப்பு.) இப்போது நமக்கு $x = b$ வரையில் உள்ள பரப்பு வேண்டும்.

எனவே அப்பரப்பு $ANBA = F(b) - F(a)$ எனக் கிடைக்கிறது.

$F(b) - F(a)$ என்ற தொகையை $\int_a^b (fx)\, dx$ என்ற குறியீட்டால் தெரிவிக்கிறோம். இம்மதிப்பு $x = a$ முதல், $x = b$ வரை, $f(x)$ என்ற சார்பின் திட்டமான தொகை (Definite Integral) எனவும், a என்பது கீழெல்லையெனவும், b என்பது மேலெல்லையெனவும் கூறப்படும்,

$F(b) - F(a) = \Big[F(x) \Big]_a^b$ என எழுதுவது மரபு.

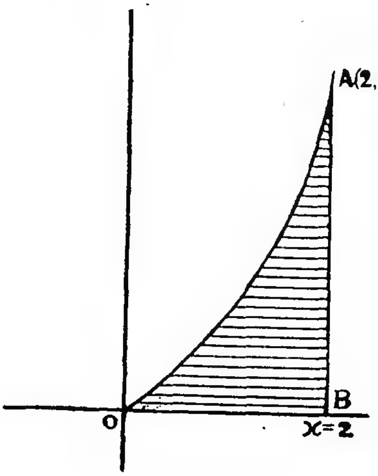
எனவே பரப்பு $MNBA = \int_a^b f(x)\, dx = \Big[\quad F(x) \quad \Big]_a^b$

$= F(b) - F(a)$

7·11 எடுத்துக்காட்டு 1

$y = 2x^2$ என்ற சார்பின் வளைவரை, x அச்சு, $x = 2$ என்ற நிலைக்கோடு என்பவற்றால் படம் 7·111 இல் கோடிட்டுக் காட்டியபடி வரம்பிடப்பட்ட பரப்புத் தொகையென்ன ?

முடியுமானவரை கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் படம் வரைந்து கொள்வது நல்லது. இங்கு $x = 0$ க்கு $y = 0$ ஆகிறது.



படம் 7·111

ஆகவே வளைவரை ஆய ஆதி வழியாகச் செல்கிறது. மேலே வரையப்பட்ட வளைவரையைக் காண்க. இப்போது நமக்கு வேண்டிய பரப்பு OAB (OA வளைவரைப் பகுதி)

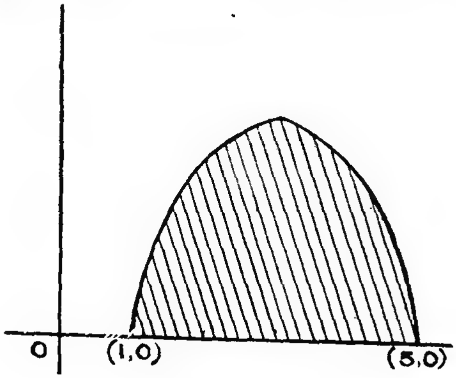
$$\therefore \text{ பரப்பு } = \int_0^2 2x^2 dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{16}{3} - 0$$

$$= 5\tfrac{1}{3} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

(2) $y = -x^2+6x-5$ என்ற வளைவரையை x அச்சு வெட்டுகிறது. வெட்டப்பட்ட வில் துண்டின் பரப்பைக் காண்க. (படம் 7·112 இல் கோடிடப்பட்ட பகுதி)



படம் 7.112

$y = -x^2+6x-5$ என்ற வளைவரையை x அச்சு வெட்டுகிறதெனின் அவ்வெட்டுமிடங்களில் y = பூச்சியமாகும்.

எனவே $-x^2+6x-5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் வெட்டுமிடங்களைத் தரும். அவை $x=1$, $x=5$ எனக் காணலாம். படம் 7·112 காண்க.

$$\text{நமக்கு வேண்டிய பரப்பு} = \int_1^5 (-x^2+6x-5)\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3}+3x^2-5x\right]_1^5$$

$$= \left(\frac{-125}{2}+75-25\right)-\left(-\frac{1}{3}+3-5\right)$$

$$= \frac{32}{3} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

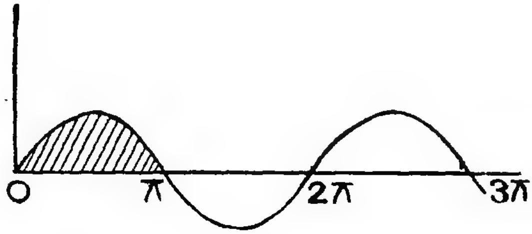
(3) $y=\sin x$ என்ற வளைவரையில் ஒரு வில்லுக்கும் x அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு காண்க. (படம் 7·113 இல் கோடிடப்பட்ட பகுதி)

$x=0$ ஆனல் $y=0$

$x=\frac{\pi}{2}$ ஆனல் $y=1$

$x=\pi$ ஆனல் $y=0$

எனவே ஒரு வில் $x=0$ முதல் $x=\pi$ வரையில் பரந்திருக்கிறது. படம் 7·113. பார்க்க.



படம் 7·113

மற்ருேர் வில் π முதல் 2π வரையிலும், அடுத்த வில் 2π முதல் 3π வரையிலும், இவ்வாருக ஒவ்வொரு வில்லும் π அகலம் உள்ளது எனப் படத்தில் பார்த்தால் தெரியும்.

$$\text{முதல் வில்லின் பரப்பு} = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$= 1-(-1)$$

$= 2$ சதுர அலகுகள்.

இரண்டாவது வில்லின் பரப்பு

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\Big[1-(-1)\Big]$$

$$= -2$$

இந்த குறை மதிப்பு பெறப்படுவதின் காரணம்: $x = \pi$ முதல்; $x = 2\pi$ வரை, $\sin x$ இன் மதிப்பு குறை மதிப்புடைய தாய் இருப்பதைக் காண்க. எனவே அதன் பரப்பு குறை மதிப்பாகப் பெறப்படினும், பரப்பு 2 சதுர அலகுகளேயாம். எனவே, சில சமயங்களில், திட்டமான தொகை, குறை மதிப் பாகப் பெறப்படினும், அதன் தனிமதிப்பை (Modulus—மட்டு மதிப்பை) பரப்பாகக் கொள்க.

மூன்ருவது வில்லின் பரப்பு.

$$= \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x \, dx$$

$$= \Big[-\cos x \Big]_{2\pi}^{3\pi}$$

$$= -\Big[-1 - 1 \Big]$$

$$= -(-2)$$

$= +2$ சதுர அலகுகள்.

இப்போது $x=0$ முதல் $x=2\pi$ வரை உள்ள இரு வில்களின் பரப்பினைக் காண வேண்டின் அப்பரப்பினை $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$ என எழுதி அப்பரப்பு $= -\Big[\cos x\Big]_0^{2\pi} = -\Big[1-1\Big] = 0$ என்று கொள்வதில் பொருளில்லாது போகிறது. எனவே, அப் பரப்பின் மதிப்பைக் காண முதலில் $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ இன் மதிப்பை யும் $\left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right|$ இன் மதிப்பையும் கண்டு இருமதிப்புக்களை யும் கூட்டித்தான் இருவில்களின் பரப்புக்களையும் கணிக்க வேண்டும்.

குறிப்பு: (i) $y=f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவரை, முழுவதும் x அச்சுக்குக் கீழேயே இருப்பின் பரப்பு குறைமதிப்புடையதாய் வரலாம். அப்போது அதன் தனிமதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -2.$

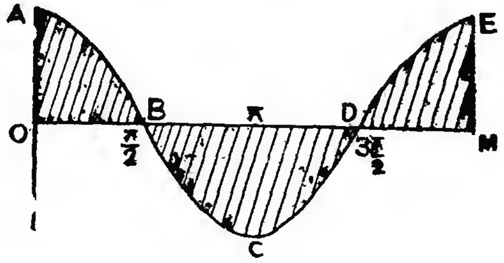
(ii) $y=f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவரை, ஒரு பகுதி x அச்சுக்கு மேலும், மற்றொரு பகுதி x அச்சுக்குக் கீழும் வருமானல், முழுப் பரப்பு பெற, இரண்டு பகுதிகளாகத் தொகை காணவேண்டும். கூட்டுப்பகுதி மதிப்பை அப்படியே எடுத்துக்கொண்டு, குறைமதிப்பை அதன் தனி அல்லது மட்டுமதிப்பாக மாற்றி கூட்டு மதிப்போடு சேர்த்து முழுப்பரப்பினையும் பெறவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு: $\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx = 2$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -2$$

$\therefore$ **இருவில்களின் மொத்த** மதிப்பு $= 2 + |-2| = 4$ சதுர அலகுகள் எனப் பெறவேண்டும்.

மற்றோர் எடுத்துக்காட்டாக, $y = \cos x$ என்ற வளைவரை



படம் 7.114

$x=0$ முதல் $x=2\pi$ வரை படம் 7:114 இல் வரைந்து காட்டப்பட்டிருக்கிறது.

OABCDEM எனக் கோடிட்ட பகுதியின் பரப்பு

$$= \int_{0}^{\pi/2} \cos x \, dx \qquad (A)$$

$$+ \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx \right| \qquad (B)$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx \qquad (C)$$

$$= \Big[\sin x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \left| \Big[\sin x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right| + \Big[\sin x \Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= (1-0) + |-1-1| + (0+1)$$

$$= 1+2+1$$

$= 4$ சதுர அலகுகள்.

7·2 : திட்டமான தொகையெனில் யாது என 7·1 இல் பார்த்தோம். அதன்படி,

$\int f(x)\,dx = F(x)+C$ ஆனால்

(C ஏதாமொரு மாறிலி)

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(b)+C \Big] - \Big[F(a)+C \Big]$$

$$= F(b) - F(a).$$

அளவுபடாத தொகையில் தோன்றும் மாறிலி (ஏதாமொரு மாறிலி) C திட்டமான தொகையில் மறைவதைக் காண்க.

எனவே $\int_b^a f(x)dx = F(a)-F(b)$ எனவும் $\int_a^b f(x)dx=F(b)$ $-F(a)$ எனவும் பெறப்படும்.

அதாவது, மேலெல்லையையும் கீழெல்லையையும் மாற்றி எழுதினால், இருதொகையும் தனிமதிப்பில் சமமாக, ஆனால் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்ட குறியுடையதாயிருக்கும்.

மேலும்

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ எனவும் நிறுவலாம்.

ஏனெனில் $\int f(x)dx = F(x)+K$ ஆனால்

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx= F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$$

$$= F(b)-F(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

எனக் காணலாம்.

7·21 எடுத்துக்காட்டு :

1. $\int_2^3 (2x-3)^3dx$ இன் மதிப்பறிக.

$$\int (2x-3)^3dx = \frac{(2x-3)^4}{2\times4}+K.$$

$$\therefore \int_2^3 (2x-3)^3\,dx = \left[\frac{(2x-3)^4}{8} + K\right]_2^3$$

$$= \left[\frac{(6-3)^4}{8} + K\right] - \left[\frac{(4-3)^4}{8} + K\right]$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{1}{8}$$

$$= 10.$$

2. $$\int_{-1}^{+1} (ax^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + Cx + D\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \left[\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + C + D\right] - \left[-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} - C + D\right]$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + C + \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C$$

$$= 2\left(\frac{a}{3} + C\right)$$

3. $$\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \left\{\frac{1+\cos 2x}{2}\right\} dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(0 - 0\right)$$

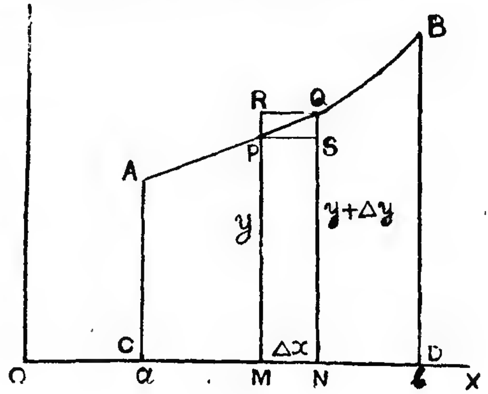
$$= \frac{\pi}{2}.$$

முன்னர் கூறியபடி, ஒரு சார்பின் திட்டமான தொகையை, குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்கிடையில் காணும்போது, "ஏதாமொரு மாறிலி" என்று சொல்லப்படும் மாறிலி மறைவது காண்க. எனவே செயல்முறையில் அம்மாறிலியை விட்டு விடலாம் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்க.

7·3 சுழற்சிப் பருப்பொருளின் கொள்ளளவு

(Volume of a solid of Revolution)

முன் பகுதிகளில் கூறப்பட்ட அடிப்படையில் $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, $x = a$, $x = b$ என்ற குத்துக்கோடுகள், x அச்சு, இவை நான்கினாலும் வரம்பிடப்பட்ட பரப்பு, x அச்சை மையங்கொண்டு ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றினால் பெறப் படும் பொருளின் கொள்ளளவு காண்போம்.



படம் 7·3

படம் 7·3 காண்க. $ABCD$ என்ற பரப்பு (AB வில்) OX ஐ ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றுகிறது எனக் கொள்வோம். $OM = x$ எனவும் $ON = x + \Delta x$ எனவும், கொண்டால் $MN = \Delta x$ ஆகிறது. $APMC$ என்ற பரப்பு சுற்றுவதால் பெறப்படும் கொள்ளளவு $V(x)$ எனவும், $AQNC$ என்ற பரப்பு சுற்று வதால் ஏற்படும் கொள்ளளவு $V(x + \Delta x)$ எனவும் கொள்க இங்கு $V(x)$ என்பது ஒரு x இன் சார்பு எனக் கொள்ளலாம்; ஏனெனில் கொள்ளளவு, M என்ற புள்ளி இருக்கும் இடத்தைப் பொருத்தது, என்பது தெரிகிறது.

$MP = y$, $NQ = y + \Delta y$. எனக் கொள்வது நமது மரபு என நாம் அறிவோம். எனவே $V(x + \Delta x) - V(x) = \Delta V$ எனக் கொள்வோமாயின்,

ΔV என்பது, $MNQP$ (PQ வில்)என்ற பரப்பு x அச்சைச் சுற்றினால் பெறப்படும் கொள்ளளவு எனப் பெறப்படும்.

அக்கொள்ளளவு, செவ்வகம் $MNSP$ சுற்றினால் பெறப் படும் கொள்ளளவுக்கு அதிகமாகவும், செவ்வகம் $MNQR$

சுற்றினுல் பெறப்படும் கொள்ளளவுக்குக் குறைவாகவும் இருக்கும் என்பது பார்த்தாலே தெரிகிறது.

செவ்வகம் $MNSP$, x அச்சைச் சுற்றினுல் பெறப்படும் பொருள் ஓர் உருளை ; அதன் வட்ட ஆரம் $MP = y$; அதன் உயரம் Δx. எனவே அவ்வுருளையின் கொள்ளளவு $\pi y^2 \Delta x$. அவ்வாறே, $MNQR$ என்ற செவ்வகம் x அச்சைச்சுற்றினுல் பெறப்படும் பொருளான உருளையின் வட்ட ஆரம் $(y + \Delta y)$. உயரம் Δx, எனவே அவ்வுருளையின் கொள்ளளவு $\pi(y + \Delta y)^2 \Delta x$.

$\therefore$ முன் கூறியபடி,

$\Delta V > \pi y^2 \Delta x$.

$\Delta V < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$.

$$\therefore \quad \pi y^2 \Delta x < \Delta V < \pi(y+\Delta y)^2 \Delta x$$

$\therefore$ இரு பக்கங்களையும் Δx ஆல் வகுக்க

$$\pi y^2 < \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2$$

$\therefore$ $\Delta x \to o$ ஆகும்போது,

$\frac{dv}{dx} = \pi y^2$ எனப் பெறப்படுகிறது.

$$\therefore \quad V = \int \pi y^2 dx$$

எனவே $V = \int \pi y^2 dx = F(x) + C$ எனக் கொண்டால், $F'(x) = \pi y^2$ என்பது நமக்குத் தெரியும். இப்போது C இன் மதிப்பை, முன்பு, பரப்பு காணும்போது [7·1இல்] பயன் படுத்திய முறைப்படி காணலாம்.

$x = a$ என்னும்போது $V = O$.

$\therefore \quad O = F(a) + C$

$\therefore \quad C = -F(a)$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore \quad V = F(x) - F(a)$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore$ $x = b$ ஆனுல், $x = a$ முதல், $x = b$ வரை உள்ள பரப்பு சுழல்வதால் பெறக்கூடிய கொள்ளளவு,

$$V = F(b) - F(a) \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

இதை $V = \int_a^b \pi y^2 \, dx$

$= \Big[F(x) \Big]_a^b$

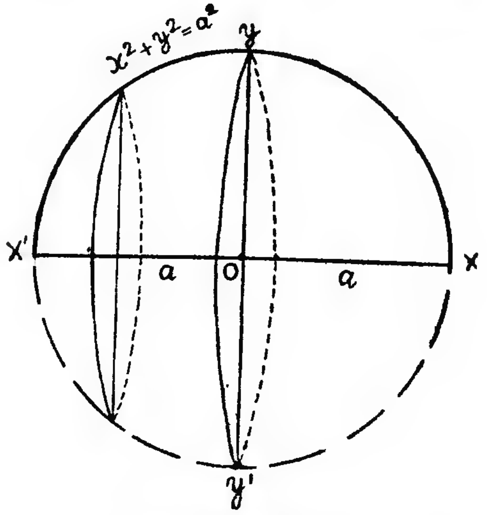
$= F(b) - F(a)$ என எழுதுகிறோம்.

எனவே ஒரு வளைவரை, இரு குத்துக் கோடுகள், x அச்சு இவைகளால் வரம்பிடப்பட்ட பரப்பை திட்டமான தொகையாகக் கணக்கிட்ட மாதிரி, அப்பரப்பு, x அச்சை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றுமானால் பெறப்படும் பொருளின் கொள்ளளவும் கணக்கிட முடியும்.

7·31 எடுத்துக்காட்டுக

(1) x அச்சுக்குமேல் இருக்கும் $x^2+y^2=a^2$ என்ற அரை வட்டம் x அச்சை மையங்கொண்டு ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றுமானால் ஒரு கோளப்பொருள் கிடைக்கும் (படம் 7.31).

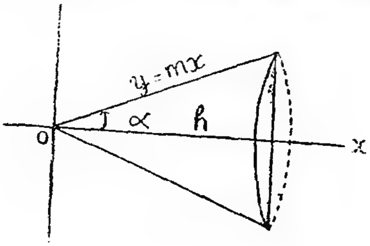
(2) $y = mx$ என்ற கோட்டை, $x = h$ என்ற குத்துக்



கோளப் படம் 7·31

கோடு வெட்டினால், $y = mx$ என்ற கோடு, x அச்சு, $x = h$ என்ற

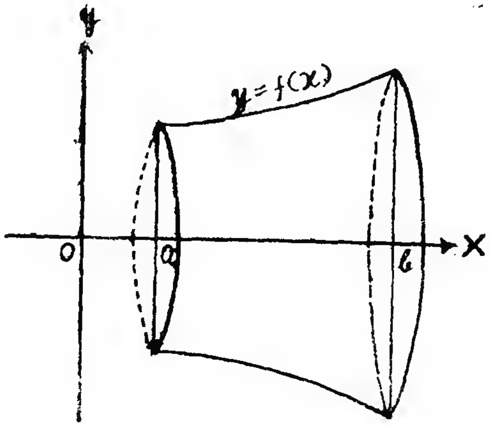
குத்துக்கோடு இவை மூன்றாலும் ஒரு முக்கோணப் பரப்பு வரம்பிடப்படுகிறது. அம்முக்கோணப் பரப்பு x அச்சை மையங்கொண்டு ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றுமானால், ஒரு சரியான கூம்பு கிடைக்கும்; அதன் உயரம் h ஆக இருக்கும் ; $\tan \alpha = m$ ஆனால், அக்கூம்பின் மையப்பாதி கோணம், α ஆகவிருக்கும்.



கூம்புப் படம் 7·32

இவற்றை படம் 7·32 வைக்கொண்டு கற்பனை செய்து காண்க.

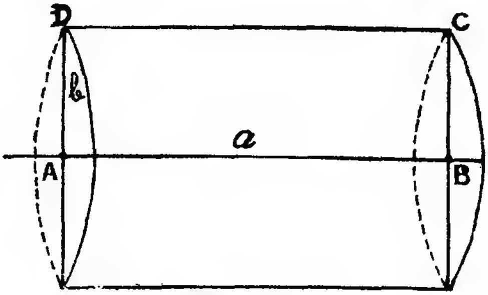
(3) இவ்வாறே $y = f(x)$ என்ற வளைவரை, $x = a$, $x = b$ என்ற குத்துக்கோடுகள், x அச்சு, இவை நான்கும் வரம்பிடும் பரப்பானது, x அச்சை மையங்கொண்டு ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றுமானால், ஒரு லோட்டா (tumbler) போன்ற ஒரு பொருள்



படம் 7·33 லோட்டா

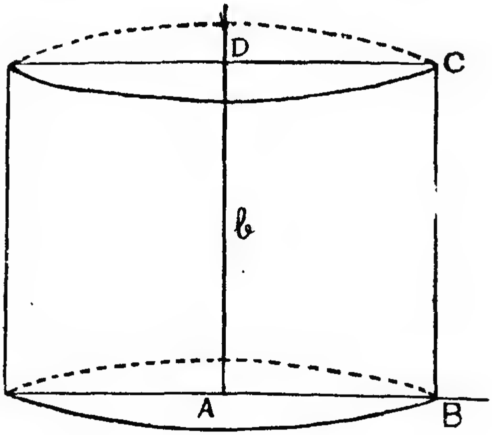
கிடைப்பதைப் பின்வரும் படங்கொண்டு கற்பனை செய்து காண்க. (படம் 7·33)

$x = a, y = b$ என்ற நேர்கோடுகள் x அச்சு y அச்சு இவை நான்கினாலும் வரம்பிடப்பட்ட ஒரு செவ்வகப் பரப்பு x அச்சை அல்லது y அச்சை மையங்கொண்டு ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினால் ஒரு உருளை கிடைப்பதைக் கற்பனை செய்து பார்க்க.



படம் உருளை 7·341

ABCD என்ற செவ்வகம் x அச்சினை ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் உருளை ; வட்ட ஆரம் b ; உயரம் a மேல்படத்தில் காண்க. (படம் 7·341)



படம் 7.342 உருளை

ABBD என்ற செவ்வகம் y அச்சினை ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் உருளை ; வட்ட ஆரம் a ; உயரம் b மேல்படத்தில் காண்க. (படம் 7·342)

எடுத்துக்காட்டு :

(1) முன்பு 7·31 (i) இல் விளக்கப்பட்டபடி, a ஆரம் உடைய கோளத்தின் கொள்ளளவு காண்க.

$$V = \int \pi y^2 dx$$

தொகைக்குரிய x இன் எல்லைகள் : $-a$ முதல் $+a$ வரை, என்பது x அச்சுக்கு மேலுள்ள அரைவட்டப் பரப்புக்குரிய எல்லைகளாகும்.

இங்கு $x^2+y^2=a^2$ ஆனால்

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$\therefore V = \int_{-a}^{a} \pi (a^2 - x^2)\, dx$$

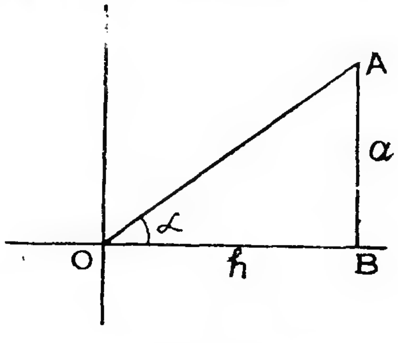
$$= \pi \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \pi \left[a^2x - \frac{a^3}{3} - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) \right]$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi a^3 \text{ கன அலகுகளாகும்.}$$

(2) முன்பு 7 . 31 (ii)இல் விளக்கப்பட்டபடி, வட்ட ஆரம் a, உயரம் h உள்ள கூம்பின் கொள்ளளவு காண்க.

படம் 7 . 35 இல் OA என்ற கோட்டின் சமன்பாடு $y=mx$



படம் 7·35

எனக் கொண்டால, இக்கூம்பினைப் பிறப்பிக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு $y = x \tan \alpha$.

$$= x . \frac{a}{h}$$

எனவே கூம்பின் கொள்ளளவு

$$V = \int_0^h \pi y^2\, dx.$$

ΔOAB சுழல்வதால், x இன் எல்லைகள் 0 முதல் h வரை யென்பதைப் படத்தில் காண்க.

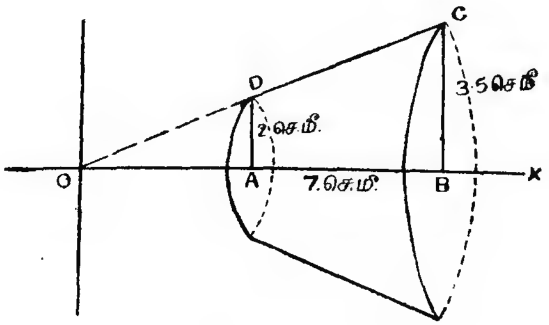
$$\therefore V = \int_0^h \pi\, x^2 \frac{a^2}{h^2} dx.$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}.$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi a^2 h \text{ கன அலகுகளாகும்.}$$

(3) ஒரு சாதாரண லோட்டா (Tumbler) 8 செ. மீ. உயரம். அதன் அடிப்பாகமும் மேற்பாகமும் முறையே 4 செ.மீ., 7 செ.மீ. விட்டமும் உடையன. அதன் கொள்ளளவு காண்க.



படம் 7·36

படம் 7·36 இல் $ABCD$ என்ற பரப்பு x அச்சை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றுமானுல், அந்த லோட்டா உருவம் கிடைக்குமென் பதை கற்பனை செய்து புரிந்து கொள்க. CD என்ற கோடு

நீட்டப்பட்டு x அச்சை O என்ற இடத்தில் வெட்டுவதாகக் கொள்க. $OABX$ என்பது x அச்சாகவும், O வழியாக OXக் குள்ள குத்துக்கோடு y அச்சாகவும் கொள்ளப்பட்டால், ODC என்ற நேர் கோட்டின் சமன்பாடு காணலாம்

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OA \times AB}{BC}$$

$$\therefore \frac{a}{2} = \frac{a+7}{3 \cdot 5}.$$

$$\therefore 3 \cdot 5a = 2a + 14.$$

$$1 \cdot 5a = 14$$

$$a = \frac{14 \div 2}{3} = \frac{28}{3}$$

$$\tan(\angle DOA) = \frac{2}{a} = \frac{2 \times 3}{28} = \frac{3}{14}.$$

$\therefore OC$ இன் சமன்பாடு $y = \frac{3}{14}x$

ஆனால் $OA = \frac{28}{3}$ செ.மீ;

$$OB = \frac{28}{3} + 7 = \frac{43}{3} \text{ செ.மீ.}$$

$$\therefore \text{கொள்ளளவு} = \int_{28/3}^{49/3} \pi \left(\frac{3}{14}x\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi \times 9}{14 \times 14} \times \left(\frac{x^3}{3}\right)_{\frac{28}{3}}^{\frac{49}{3}}$$

$$= \frac{\pi \times 9}{14 \times 14} \times \frac{1}{3}\left[\frac{(49)^3}{27} - \frac{(28)^3}{27}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{9}{14 \times 14} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{27} + 95697$$

$$= \frac{341}{2}$$

$$= 170 \cdot 5 \text{ க.செ.மீ.}$$

பயிற்சி 7.

1. பின்வரும் வளைவரைகள், குறிப்பிட்ட குத்துக்கோடுகள், x அச்சு இவைகளால் வரம்பிட்ட பரப்புகளைக் காண்க.

வளைவரை	குத்துக்கோடுகள் (அல்லது) x-ன் எல்லைகள்
(1) $y = \frac{x^2}{4a}$	$x = 0$; $x=2$
(2) $y = x^2 + x$	$x = 1$; $x=2$
(3) $y^2 = 4x$	$x = 0$; $x=4$
(4) $2y = x^3$	$x = 0$; $x=2$

2. பின்வரும் வரைகள் ஒவ்வொன்றும் x அச்சினல் இருவிடங்களில் துண்டிக்கப்படுகின்றன. துண்டிக்கப்பட்ட வில் பகுதிகளுக்கும் x அச்சுக்கும் உள்ள பரப்பிணைக் காண்க.

(1) $y = x^2 - 5x + 6$.

(2) $y = 10 - 3x - x^2$.

(3) $y = x^2 - x$.

(4) $y = x^2 + 6x - 7$.

(5) $y = 8 - 2x - x^2$.

3. தொகைப்படுத்தல் வழியாக பின்வரும் சுழல்பொருள் களின் கொள்ளளவு காண்க.

(1) ஒரு அரைக்கோளம் (ஆரம் a)

(2) a செ.மீ. நீளம்; b-செ.மீ. விட்டம் உள்ள உருளை.

4. ஒரு கூம்பின் வெட்டுப்பகுதி; அடித்தள வட்ட விட்டம் 6 செ.மீ; மேல்தள வட்ட விட்டம் 3 செ.மீ.; உயரம் 4 செ.மீ. இதன் கொள்ளளவு காண்க.

5. 10 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு கோளம் அதன் மையத்திலிருந்து 6 செ.மீ. தூரத்தில் ஒரு தளத்தால் வெட்டப்படுகிறது. அப்படி வெட்டப்பட்ட சிறு பகுதியின் கொள்ளளவு காண்க.

6. x அச்சால் வெட்டப்பட்ட $y = x + x^2$ என்ற வளை வரையின் மூடிய விற்பகுதி x–அச்சை ஒரு முழுச்சுற்று சுற்று கிறது. அப்படிப் பெறப்படும் சுழற்பொருளின் கொள்ளளவு காண்க.

7. $y = 2 \sin 3x$ என்ற வளைவரையினை x அச்சு வெட்டுங் கால் பெறப்படும் மூடிய விற்பகுதி x அச்சை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் பொருளின் கொள்ளளவு காண்க.

8 $y^2 = 4x$ என்ற வளைவரை, $x = 2$ என்ற குத்துக்கோடு; x-அச்சு, இவற்றால் வரம்பிட்ட பரப்பு x–அச்சை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் பொருளின் கொள்ளளவு காண்க.

9 $y = 2 + x - x^2$ என்ற வரை x அச்சை வெட்டுவதால் பெறப்படும் மூடிய விற்பரப்பு, x-அச்சை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் பொருளின் கொள்ளளவு காண்க.

10. $\frac{dy}{dx} = 3x^3 - 2x + 5$ எனவும் $x = 2$ ஆனால் $y = 5$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. x இன் சார்பாக y காண்க.

11. ஒரு வளைவரையின் சரிவு $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 3$ எனவும், அவ் வளைவரை, (1,6) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அவ்வளைவரையின் சமன்பாடு காண்க.

12. (3,1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளைவரையின் சரிவு $x^2 - x$ ஆனால் அவ்வளைவரையின் சமன்பாடு காண்க.

13. ஒரு துகள் A என்ற இடத்திலிருந்து புறப்பட்டு ஒரு நேர்கோட்டில் ஓடுகிறது. t விநாடிகளில் அதன் வேகம் $v = 8 + 4t$ என்ற வாய்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது. அது 16 விநாடிகளில் A-யிலிருந்து எவ்வளவு தூரம் சென்றிருக்கும் எனத் தொகை மதிப்பீட்டு முறையில் காண்க.

14. ஒரு நேர்கோட்டில் ஓடும் ஒரு துகள், விநாடிக்கு u (மாறிலி) வேகத்துடன் A யிலிருந்து புறப்பட்டு விநாடிக்கு

விநுடி f (மாறிலி) முடுக்கத்துடன் ஓடுகிறது. t விநுடிகளில் அதன் வேகம் $u+ft$ எனவும் அது A லிருந்து ஓடியுள்ள தூரம் $ut+\frac{1}{2}ft^2$ எனவும் நிறுவுக.

15. ஒரு குறிப்பிட்ட இடம் Aலிருந்து ஒரு துகள் t விநுடிகளில் செல்லும் தூரம் s. புறப்படும்போது அதன் வேகம் u (மாறிலி). விநுடிக்கு விநுடி அதன் முடுக்கம் $2t+3t^2$ ஆனால் 10 விநுடிகளில் அதன் வேகம் $u+1100$ எனவும், அது Aயிலிருந்து சென்றுள்ள தூரம் $10u+\frac{8500}{3}$ எனவும் நிறுவுக.

விடைகள்

பயிற்சி 2.

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\propto$
4. 0
5. $-\frac{1}{4}$
6. -2
7. $\frac{1}{6}$
8. 0
9. π
10. 18
11. $\dfrac{m^2}{2n}$
12. $\dfrac{1}{m}$
13. $\frac{7}{5}$
14. 2
15. $2\frac{1}{3}$

பயிற்சி 3·1

1. $6x\,\Delta x+3(\Delta x)^2$
2. $\dfrac{-\Delta x}{(x+1)\,(x+\Delta x+1)}$

3. $\Delta x - \dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

4. $2x+\Delta x+(\Delta x)^2$

5. $4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x$

பயிற்சி 3·2

1. 4
2. $2ax+b$
3. $-2b(a-bx)$
4. $3x^2+2x$
5. $2x$
6. $\dfrac{-2}{x^3}$
7. $-\dfrac{2}{(2x-1)^2}$
8. $\dfrac{-2}{(x-1)^2}$
9. $x\cos x+\sin x$
10. $m\cos mx$
11. $-m\sin mx$
12. $3\sec^2 3x$

பயிற்சி 3·3

I. 1. $4x^3+2x$

2. $3Cx^2+2ax+b$

3. $3(x+4)^2$

4. $6(2x+1)^2$

5. $-2n(3-2x)^{n-1}$

6. $-a\sin(ax+b)$

7. $2a\sec^2(2ax)$

8. $-\cos 3x\sin x-3\cos x\sin 3x$

9. $a\cos ax\cos bx-b\sin ax\sin bx$

10. $5\sin^4 x\cos x$

11. $-4a\cos^3 ax\sin ax$

12. $\dfrac{-3}{(x-2)^2}$

13. $-3(2-3x-5x^2)(3+10x)$

14. $\frac{-\pi}{180}\sin x^0$

15. $-6\cos^2 2x \sin 2x$

16. $-\sin^3 ax \sin x + 3a \sin^2 ax \cos ax \cos x$

17. $\frac{\cos 2x \cos x + 2\sin 2x \sin x}{\cos^2 2x}$

18. $3(x+a)^2(b-2x)^3 - 6(x+a)^3(b-2x)^2$

19. $\frac{2x^2+14x+8}{(x^2+2x+3)^2}$

20. $-10x(1-x^2)^4$

II. (1) $\frac{-K}{x^2}$

(2) $-\left(\frac{2x+3y}{3x+10y}\right)$

(3) $\frac{a\sin ax}{b\cos by}$

(4) $-\frac{\sec^2 x}{\sec y \tan y}$

(5) $\frac{-4x}{9y}$

III (1) $\frac{1}{3t}$.

(2) $\frac{3}{2}$

(3) $\frac{-2}{3t}$

(4) $\frac{\sin t}{1+\cos t}$

(5) $-\tan\theta$

பயிற்சி 4·1

(1) $3x-y-10=0$; $x+3y=10$

(2) $x+2y=12$; $2x-y=9$

(3) $ax+y=a^2$; $x-ay=a$

(4) $y+4=0$; $x-2=0$

(5) $x-2y=-4a$; $y+2x=12a$

(6) $y-\frac{43}{27}=0$; $x-\frac{1}{3}=0$; $y-\frac{41}{25}=0$; $x-\frac{3}{5}=0$

(7) $2x+y=0$; $x-2y=5$

(8) $x-y+3=0$; $x+y-5=0$

(9) $2\sqrt{3}x+4y=\sqrt{3}\pi-22$; $4x-2\sqrt{3}y=2\pi+11\sqrt{3}$

(10) $10x-y-8=0$; $x+10y-21=0$

(11) $(\sqrt{3}+1)x+y-\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}+1)-\frac{2+\sqrt{3}}{2}=0$

$$x-(1+\sqrt{3})y=\frac{\pi}{3}-\frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2}$$

2. $a=2$; $b=3$, $c=1$

3. $y=2x+5$

4. $(0,0)$; $\left(2,-\frac{4}{3}\right)$

5. தொ.வ : $4x-4y=\pi-2$;
கு.கோ : $4x+4y=\pi+2$;

$\frac{\pi}{8}$ சதுர அலகுகள்.

6. $x=0, m=2$; $x=1, m=-1$; $x=2, m=2$

$x=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ என்ற புள்ளிகளுக்குரிய வரைகோடுகள்.

7. $\tan\theta=\frac{3}{5}$; $y=x-\frac{1}{4}$

8. 9. $y=6x-21$

10. $y=\frac{x}{2}+2a$

11. $\tan\theta=\frac{3}{4}$

12. $\tan\theta=\frac{1}{4}$

பயிற்சி 4.2

2. $x<2$, $x>4$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு வளரும் சார்பு $2<x<4$ என்ற இடைவெளியில் குறையும் சார்பு ; $x=2$, $x=4$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $\frac{dy}{dx}=0$.

3. $x>3$ வளரும் சார்பு ; $x<3$ குறையும் சார்பு $x=3$ க்கு $\frac{dy}{dx}=0$.

பயிற்சி 4·3 (விடை)

	திருப்பப் புள்ளிகள்	மீப்பெரு மதிப்பு	மீச்சிறு மதிப்பு
1. (i)	1, 3	$x=1$; 1	$x=3$; -3
(ii)	$-2, \sqrt{3}$	$x=-2$; 55	$x=3$; -70
(iii)	$-\sqrt{2}, \sqrt{2}$	$x=-\sqrt{2}$; $12+4\sqrt{2}$	$x=\sqrt{2}$; $12-4\sqrt{2}$
(iv)	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{81}{4}$
(v)	3		-15
(vi)	a, b	$x=b$; $24a^2+3ab^2-b^3$	$x=a$; $24a^2-a^2+3a^3b$
(vii)	$\sin x=\pm\frac{4}{5}$ $\cos x=\pm\frac{3}{5}$	5	5

2. (i) $-1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; (ii) $6\pm\frac{2}{\sqrt{\ }}$

3. (i) இல்லை
(ii) இல்லை
(iii) $x=a$ உண்டு
(iv) $x=1$ உண்டு
(v) $x=-a$ உண்டு

4. $x=\frac{3}{4}$; மீப்பெரு மதிப்பு $8\frac{1}{3}$

5. a கூட்டு–மீச்சிறு ; a குறை–மீப்பெரு

6. x^3-6x^2+9x+8

7. $AP=6$ செ.மீ.

8. $\frac{1}{2}$

9. $5\sqrt{6}$ செ.மீ.

10. 100 செ.மீ. பக்கம் ; உயரம் 50 செ.மீ.

12. ஆரம் $\frac{60}{\pi}$ செ.மீ.; நீளம் 60 செ.மீ.

13. $\frac{ab}{4}$

14. 400 அடி

15. $2x^2-18x+153$; 112·5

19. (1) ஆரம் 16 செ.மீ., நீளம் 8 செ.மீ.
(2) ஆரம் 12 செ.மீ.; நீளம் 12 செ.மீ.

20. உருளையின் உயரம் 4 செ.மீ.; வட்ட ஆரம் 6 செ.மீ.
கொ. 144π

21. உயரம் = வட்ட ஆரம் $= a$

பயிற்சி 5

I. (1) வே : $3+24t$
மு : 24

(2) வே: $10t-15\sin t$
மு: $10-15\cos t$ மு : $=0$; $\cos t=\frac{2}{3}$

(3) வே: $u+ft$
மு: f

(4) வே: $48+48t^2$ வே : 96
மு: $96t$ மு : 96

(5) வே: $9000-1000\,t$
மு : -1000
வே : $=0$, $t=9$ வி.

(6) வே: $-a\omega\sin\omega t-b\,\omega\cos\omega t$
மு : $-a\omega^2\cos\omega t+b\omega^2\sin\omega t$

பயிற்சி 6

1. $\dfrac{3x^5}{5}$

2. $x-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

3. $\frac{1}{16}(4x+3)^4$

4. $-\frac{1}{24}(3-4x)^6$

5. $-\dfrac{1}{3(n+1)}(1-3x)^{n+1}$

6. $\dfrac{1}{2(2x-1)}$

7. $-\dfrac{1}{a\,(n-1)\,(ax+b)^{n-1}}$

8. $\dfrac{(x+1)^4}{4}-\dfrac{4\,(x+1)^3}{3}-\dfrac{2}{x+1}$

9. $\dfrac{x^3}{3}+3\,\dfrac{x^2}{2}-4x-\dfrac{7}{x}$

10. $\dfrac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}-6\sqrt{x}$

11. $\dfrac{u^6}{6}$

12. $-\dfrac{1}{u}$

13. $\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{x^5}{6}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x$

14. $-\frac{1}{2}\cos 2x$

15. $\dfrac{\sin 6x}{6}-\dfrac{\sin 5x}{5}$

16. (a) $-\frac{1}{3}\cos(3x-4)$ (b) $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)$

(c) $-6\cos\dfrac{x}{2}$ (d) $-m^2\cos\dfrac{x}{m}$

(e) $\sin\dfrac{x}{n}$

17. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}$

18. $\dfrac{2\sin 2x-\sin 4x}{8}$

19. $\frac{1}{4}\sin x+\frac{9}{4}\sin\dfrac{x}{3}$

20. $\dfrac{x-\sin x}{2}$

21. $-\cos x$

22. $\dfrac{x}{4}+\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 2x$

23. $-\dfrac{\cos^5 x}{5}$

24. $\dfrac{\sin^4 x}{4}$

25. $\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$

26. $-\frac{1}{a}\ \frac{\cos^4 ax}{4}$

பயிற்சி 7.

1. (1) $\frac{h^3}{12a}$

   (2) $3\frac{5}{6}$ ச.அ.

   (3) $10\frac{2}{3}$ ச.அ.

   (4) $1\frac{1}{3}$ ச.அ.

2. (1) $\frac{1}{6}$ ச.அ.

   (2) $21\frac{7}{6}$ ச.அ.

   (3) $\frac{1}{6}$ ச.அ.

   (4) $85\frac{1}{3}$ ச.அ.

   (5) 36 ச.அ.

3. (1) $\frac{2}{3}\pi\ a_2$

   (2) $\frac{\pi a\ b^2}{4}$

4. 66 க.செ.மீ.

5. 138 $\frac{2}{3}$ க.செ.மீ.

6. $\frac{30}{\pi}$

7. $2\frac{\pi^2}{3}$

8. 8π

9. $8\frac{1}{10}$

10. $y=x^3-x^2+5x-9$

11. $y=2x^3+3x+1$

12. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x_2}{2}-\frac{7}{2}$

13. 640 அலகுகள்

இரண்டாம் பகுதி

கணவியல்

(Set Theory)

I. கணங்கள்—உப கணங்கள்

(Sets and sub-sets)

முன்னுரை: உங்களிடம் சில புத்தகங்கள் உள்ளன. இப்புத்தகம் அதிலொன்று. உங்கள் வகுப்பில் பல மாணவர்கள் உள்ளனர், அதில் நீவிர் ஒருவர். உங்கள் கல்லூரியில் பல அறைகள் உள்ளன, நீவிர் இருக்கும் அறை அதிலொன்று. இவ்விதமான தொகுப்புகளுக்கு புத்தகத் தொகுப்பு, மாணவர் தொகுப்பு, அறைத் தொகுப்பு அல்லது கணம் (Set) [கணங்கள், Sets] எனப்பெயர். கணங்களுக்கு எடுத்துக்காட்டாகப் பல தொகுப்புகளைக் கூறலாம்:

1. ஒரு திராட்சைக் குலை;

2. கல்லூரிகள்;

3. சந்திரன், கார்த்திகேயன், விவேகானந்தர் வாழ்க்கை வரலாறு நூல்—மூன்றும் சேர்ந்து ஒரு கணம்;

4. வாரத்திலுள்ள நாட்கள்;

5. ஆண்டிலுள்ள மாதங்கள்;

6. கிழக்கு ஆசிய நாடுகள்;

7. இந்திய நாட்டுக் குடிமக்கள்;

8. பாராளுமன்ற உறுப்பினர்கள்.

இவ்வாறு எத்தனையோ கணங்கள் உள்ளன; அல்லது நாம் கற்பனை செய்து பார்க்கலாம். எனவே ஒரு கணம் என்பது சில அல்லது பலவற்றின் தொகுப்பு. எடுத்துக்காட்டு 3 இல் கூறியுள்ள ஒரு விண் பொருள், ஒரு மனிதன், ஒரு நூல் மூன்றும் சேர்ந்து கூட ஒரு கணமாகவிருக்கலாம்.

கணிதத்தில் பல பல கணங்கள் உள்ளன.

1. முழு எண்கள் ஒரு கணம்;

2. கூட்டு முழு எண்கள் ஒரு கணம்;

3. ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் ஒரு கணம்;

4. ஒரு தளத்தில் உள்ள நேர்கோடுகள் ஒரு கணம்;

5. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் 1, 2, 3, 4 என்ற நான்கு எண்களும் ஒரு கணம்.

இவ்வாறுக கணம் என்னவென்று பல எடுத்துக் காட்டுகளால் விளக்கியபோதிலும், கணம் என்பதற்கு ஒரு வரையறை வகுக்காது நாம் மேலே செல்வோம்.

ஒரு கணத்திலுள்ள பொருள்கள் (அல்லது கணத்தில் 'உள்ளவை' எனப் பொதுப்படையாகக் கூறினாலும் சரியே) அக்கணத்திலுள்ள உறுப்புக்கள் அல்லது மூலகங்கள் எனப்படும். (Members or Elements of the set). ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புக்கள் எதுவாயினும் இருக்கலாம்: ஒரு எண், ஒரு விண் பொருள், ஒரு பறவை, ஒரு ஊர், ஒரு விண் கணை, ஒரு நூல், ஒரு பெண்... எதுவாயினும் இருக்கலாம்.

எனவே கணம் என்பதற்கு நாம் வரையறை வகுக்காதது போல், ஒரு மூலகம் அல்லது ஓர் உறுப்பு என்பது யாதென வரையறுக்காது நமக்கு இயல்பாக உள்ள உணர்வு அல்லது அறிவின் அடிப்படையில் கணம், உறுப்பு இரண்டையும் ஏற்கலாம்.

1.2 குறியீட்டு முறை (Notation)

கணங்கள் பெரிய ஆங்கில எழுத்துக்களாலும் உறுப்புக்கள் சிறிய ஆங்கில எழுத்துக்களாலும் குறியீடு செய்து பயன் படுத்தப்படும்.

எ.கா. A என்பது ஒரு கணம். a அக்கணத்திலுள்ள ஓர் உறுப்பு.

a என்பது A இலுள்ள உறுப்பு என்பதை $a \in A$ என குறியீடு செய்வோம். a என்பது A இல் ஓர் உறுப்பு எனப்படிக்கலாம். (a is an element of A). மேலும் பல வழிகளில்

'a என்பது A ஐச் சார்ந்தது என்றும்

'a என்பது A இல் ஒரு மூலகம் என்றும்

'a என்பது A இல் உள்ளது' என்றும் கூறுவது வழக்கில் உள்ளது.

a, x என்பவை A என்ற கணத்தின் உறுப்புக்களானல் $a,x \in A$ என குறீயீடு செய்வோம். படிப்பது: a, x என்பவை A இன் உறுப்புக்கள் என்றும் அல்லது முன் கூறிய எந்த விதத்திலும் படிக்கலாம்.

ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புக்கள் என்ன என்பது நமக்குத் திட்டமாகத் தெரியுமாயின் அவ்வுறுப்புக்களை இரட்டை அடைப்புக்குள் எழுதுவது மரபு. எடுத்துக்காட்டாக $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\}$ என்பது ஒரு கணம், அதில் ஐந்து உறுப்புக்கள் உள்ளன. 1 என்ற உறுப்பு மட்டுமே ஒரு கணமாகக்கொள்ளப் படுமானல் அதை $\{1\}$ எனக் குறீயீடு செய்கிறோம். பொதுவாக $S=\{x$: x என்பது p என்ற கட்டுப்பாட்டிலுள்ளது$\}$ அல்லது $s=\{x: p(x)\}$ எனக்குறியீடு செய்யலாம்.

$\notin$ என்ற குறியீடு: x என்பது s என்ற கணத்தில் ஓர் உறுப்பாயில்லாது போயின் $x \notin s$ என்ற குறியீடு மரபாம். படிப்பது 'x என்பது s என்ற கணத்தின் உறுப்பல்ல' அல்லது 'x என்பது s ஐச் சார்ந்ததல்ல'

எ.கா: $0 \notin s=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.3 சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

1. ஒரு தமிழ் ஆண்டின் மாதங்களை ஒரு கணமாகக் கொண்டால் இக்கணத்தின் உறுப்புக்கள் சித்திரை, வைகாசி, ஆனி, ஆடி, ஆவணி, புரட்டாசி, ஐப்பசி, கார்த்திகை, மார்கழி தை, மாசி, பங்குனி என்பதாம்.

2. ஆங்கில உயிரெழுத்துக்கள் ஒரு கணம்; இக்கணம் $\{a, e, i, o, u\}$ என்பதாம்.

3. கூட்டு முழு எண்கள் ஒரு கணம். இதை

$Z=\{x$: $x=n$, n ஒரு கூட்டு முழு எண்$\}$

[குறியீடு: கூட்டு முழு எண்களை பொதுவாக z என்றே குறியிடுவோம்].

4. ஒன்றையும் இரண்டையும் விலக்கி, ஒன்றுக்கும் இரண்டுக்கும் இடைபட்ட அளவுக்கிணங்கிய எண்களின் கணத்தை பின்வருமாறு கணவாயிலாக எழுதலாம்.

$A=\{x$: $1 < x < 2$, அளவுக்கிணங்கிய எண்$\}$

5. $P=\{x$: x ஒரு பகா எண்$\}$ (Prime number)
$=2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

6. $Q=\{x: x=2n+1$, ஒரு கூட்டு முழு எண் $\}$

7. $S=\{x : 2x^3-x^2-2x+1=0\}$ எனில்
$S=\{-1, \frac{1}{2}, 1\}$

8. $C=\{x: -1 \leq x \leq 1,\ x$ ஒரு மெய்யெண்$\}$

1.4 வெளிப்படை உண்மைகள் {Axioms} :

கணவியலில் இரண்டு வெளிப்படை உண்மைகள் பின்னர் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. 'உளதென்ற' வெளிப்படை உண்மை (Axioms of existence) ஒரு கணம் இருக்கின்றது (உள்ளது) (*A* Set exists)

2. முற்றொருமை வெளிப்படை உண்மை (Axiom of identity)

A, B என்ற கணங்களில், A இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் B இல் உள்ளது; B இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் A இல் உள்ளது என்றால் அப்போது A, B இரண்டும் ஒரே கணம்தான்.

1.5 பல்வகையான கணங்கள் (Different Types of Sets).

1.51 வரையறை :-ஒற்றைக்கணம் (Singleton set): ஒரு கணத்தில் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டும் இருக்குமாயின் அது ஓர் ஒற்றைக்கணம் எனப்படும்

$S=\{a\}$; $S=\{x : x=1\}$ என்பவை ஒற்றைக் கணத்திற்கு எடுத்துக்காட்டு. மேலும் 1,1,1... என்ற எண்தொகுப்பை $\{1\}$ என்றுதான் கொள்ளவேண்டும். அதாவது ஒரு தொகுப்பில் ஓர் உறுப்பு பன்முறை தோன்றினாலும், அத்தொகுப்பிற்குரிய கணத்தில் அவ்வுறுப்பு ஒரே முறைதான் கொள்ளப்படும். எடுத்துக்காட்டாக $\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$ என்ற தொகுப்பு $\{1, 2, 3\}$ என்ற தொகுப்பிற்குச் சமமாகக் கொள்ளப்படும்) மேற்கொண்டு ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புக்களை எந்த வரிசையில் எழுதினாலும் வரிசை மாற்றத்தால் கணம் மாறாது. எடுத்துக்காட்டாக

$S=\{1,2\}=\{2,1\}$

$A=\{a,b,c\}=\{a,c,b\}$

$=\{b,c,a\}=\{b,a,c\}$

$=\{c,a,b\}=\{c,b,a\}$.

குறிப்பு: ஒற்றை கணத்திற்கும், ஒரு உறுப்பிற்கும் வேறுபாடுண்டு. பின்னர் 1.56இல் உள்ள முக்கியக் குறிப்பில் காண்க

1.52. வரையறை : கணக்கிலடங்கிய கணம் (Finite Set) :

ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புடையதாக இருப்பின் அது ஒரு கணக்கில் அடங்கிய கணம் எனப்படும். (எ.கா.) $S=\{a,b,c,d,e\}$ ஐந்து உறுப்புக்களைக் கொண்ட கணக்கிலடங்கிய கணம்.

1.53 வரையறை : கணக்கிலடங்கா அல்லது கந்தழிக் கணம் (Infinite Set) : ஒரு கணத்திலுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிலடங்காததாக இருப்பின் (எண்ணி முடியாததாக இருப்பின்) அது ஒரு கந்தழிக்கணம் எனப்படும்.

குறிப்பு : ∞ ஐக்குறிக்க நாம் கந்தழி என்ற சொல்லையே பயன்படுத்துவோம்; ஏனெனில் இச்சொல்லே ∞–ஐக்குறிக்க மற்றைய உயர்க் கணிதப் பகுதிகளிலும் ஒரே சீராகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு:-

1. $Z=\{x : x$ கூட்டு முழு எண் $\}$

2. $S=\{x : x=2^n,$ n கூட்டு முழு எண்$\}$
   $=\{2, 4, 8...\}$

1.54 வரையறை : வெற்றுக்கணம் (Empty Set):

ஒரு கணத்தில் ஓர் உறுப்புக்கூட இல்லாது இருப்பின் அது வெற்றுக்கணம் அல்லது வெறுங்கணம் (Null Set) எனப்படும்.

[இது வெளிப்படை உண்மை; 1.4, (1)இல் குறிப்பிட்டபடி இதுவும் ஒரு கணமாகும்.]

குறியீட்டுமுறை : வெற்றுக்கணம் என்பது $\varnothing$ என்ற குறியீட்டினுல் பொதுவாகக் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு: $S=\{0\}$ என்பது வெறுங்கணமல்ல ; இங்கு பூச்சியம் என்ற ஒரு உறுப்பு உள்ளது. எனவே இது ஒற்றைக் கணம் என்ற வகையில் அடங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

1. $S=\{x : x=$ 5க்கு மேற்பட்டு 7க்குக்குறைவான ஒற்றைப் படைஎண்$\}$ என்று கொண்டால் S என்பது ஒரு வெறுங்கணம் $\varnothing$

2. $S=\{x: x=$ முதல் ஒன்பது இயற்கை எண்களில் பத்தால் மீதியின்றி வகுபடக்கூடியது$\}$

$=\{x: x$ is a multiple of ten among the first nine natural numbers$\}$

$=\varnothing$.

1.55 வரையறை : உபகணம் (sub–set): S_1 என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் S என்ற கணத்தில் இருக்குமாயின் S_1 என்பது S என்ற கணத்தின் ஓர் உபகணம் எனப்படும். இதை $S_1 \subset S$ என எழுதுவோம்.

இதைப் படிக்கும்பொழுது S_1 என்பது S இன் உபகணம்; அல்லது S_1 என்பது S இல் அடங்கியுள்ளது எனப்படிக்கலாம். இதையே $S \subset S_1$ என்றும் குறியீடு செய்வது மரபாம்.

சில சமயம் S என்பது S_1 ஐவிட உயர்ந்த கணம் (Super Set) எனவும் கூறுவதுண்டு.

குறிப்பு: ஆனால் 1·4, (2)இல் கூறியபடி S_1 இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் Sஇல் இருந்து, மேலும் S இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் S_1 இல் இருக்குமானல்

$S_1 \supseteq S$; $S \supseteq S_1$ என்ற இரண்டும் ஒருங்கே பொருந்தும்.

அதாவது $S=S_1$

என்பது உண்மை. ஈண்டு இரண்டும் முற்றொருமைக் கணங்கள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு: 1. $S=\{1,2,3,4,5\}$, $S_1=\{2,4\}$எனில் $S_1 \subset S$

2. $S=\{1, 2, 3\ 4, \ldots\}$, $S_1=\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$ எனில் $S_1 \subset S$

இப்போது $S=\{a,b,c\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள உபகணங்களைக் காண்போம். அவை

$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}\ \{a,b,c,\}$ என்பனவாம்.

இங்கு $\varnothing$ என்ற வெறுங்கணமும், $\{a,b,c\}$ என்ற கணமும் S இன் உபகணங்களாக இருப்பதைக் காண்க.

1.56 தேற்றம் : S என்ற கணத்தில் N உறுப்புக்கள் இருக்குமாயின் அதில் 2^n உபகணங்கள் இருக்கும்.

தெரிப்பு :

வெறுங்கணம்	$=1$
ஒருறுப்புடைய கணங்கள்	$=N_{C_1}$.
ஈருறுப்புடைய கணங்கள்	$=N_{C_2}$.
r உறுப்புடைய கணங்கள்	$=N_{Cr}$
முற்றொருமைக் கணம்	$=1$

ஆக மொத்தம் உபகணங்களின் எண்ணிக்கை

$$=1+n_{C_1}+n_{C_2}+\dots+1$$
$$=(1+1)^n$$
$$=\quad 2^n$$

முக்கிய குறிப்பு : வெறுங் கணம் எந்த கணத்திற்கும் உபகணமாகிறது. எனவே ஒற்றைக் கணத்திற்கும் அது உபகணமாகின்றது. ஆகவே 'a' என்ற உறுப்பிற்கும் $\{a\}$ என்ற ஒற்றைக்கணத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை பின்வருமாறு அறியலாம்.

$\{a\}$ என்ற ஒற்றைக் கணத்திற்கு $\varnothing$ என்ற கணம் உப கணமாகின்றது. ஆனால் 'a' என்ற உறுப்பிற்கு $\varnothing$ என்ற கணம் உபகணமாக முடியாது.

1.57. வரையறை : ஒழுங்கு உபகணம் (Proper Subset):

S_1 என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் S என்ற கணத்தில் இருந்து S என்ற கணத்தின் கண் உள்ள உறுப்புக்களில் குறைந்தபட்சம் ஒரு உறுப்பேனும் S_1 என்ற கணத்தில் இல்லாவிடில் S_1 என்பது Sஇன் ஓர் ஒழுங்கு உபகணம் எனப்படும்.

அதாவது, $S_1 \subset S$ என்றும் $S \not\subseteq S_1$ (S என்பது S_1இன் உபகணமல்ல) என்றும் இருந்தால் S_1 என்பது S இன் ஓர் ஒழுங்கு உப கணமாகும். இதை $S_1 \underset{\neq}{\subset} S$ என்றோ $S_1 \subset S$ என்றோ குறியிடுவோம்.

மேலே கூறியவற்றிலிருந்து S_1 என்பது Sஇன் உபகணமாயின் $S_1=S$ என்பதும் இருக்கலாம். ஆனால் S_1 என்பது S இன் ஓர் ஒழுங்கு உபகணமாயின் $S_1=S$ என்பது ஒரு பொழுதும் உண்மையாகாது என்றும் அறியலாம்.

1.58 வரையறை : முறை வழுவிய உபகணம் (Improper Subset) S என்ற கணத்தில் Sஉம் $\emptyset$* உம் எப்பொழுதும் உபகணமாகின்றன. இவை இரண்டும் முறை வழுவிய உபகணங்களெனப்படும்.

1.59 வரையறை : படிக்கணம் (Power Set).

S என்ற கணத்தின் எல்லா உபகணங்களைக் கொண்டும் அமைக்கப்பெற்ற கணங்களின் கணமே படிக்கணம் எனப்படும்

எடுத்துக்காட்டு :

$S=\{a,b,c\}$ என்றால் இதன் படிக்கணம்

$$P = \left\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, \{a,b,c\} \right\}$$

என்பதாம்.

1.56 இன்படி, S இன் கண் உள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை S எனக் குறிப்பிட்டால் அதன் படிக்கணத்தின் கண் அமைந்த உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை 2^s ஆகும். எப்பொழுதும் S இன் படிக்கணத்தை 2^s என்றே குறியிடுவது வழக்கம். எனவே $S \in 2^s$ என்பதும் பொருந்தும். இதைப் போலவே $S_1 \subset S$ என்றாலும் $S_1 \in 2^s$ என்பதும் வெளிப்படை.

எடுத்துக்காட்டு :-

(a) பின்வரும் குறியீடுகள் சரியா, தவறு என்பதைக் கூறுக:

(1) $a \in \{a, b\}$

விடை : சரி, ஏனெனில் $\{a,b\}$ என்ற கணத்தில் a என்பது ஒரு உறுப்பாகும்.

2. $\{a\} \in \{a,b\}$

விடை : தவறு ; ஏனெனில் $\{a\}$ என்பது ஒரு கணமாகும். மேலும் $\{a,b\}$ என்பதும் கணமாகும். எனவே முறைப்படி $\{a\} \subset \{a,b\}$ என்றுதான் குறியீடு செய்யவேண்டும்.

அடிக்குறிப்பு : *சிலர் $\emptyset$ஐ முறை வழுவிய உபகணமாகக் கொள்ளாமல், உபகணமாகவே கொள்வர். இதில் எவ்வித ஐயப்பாடுகளும் உண்டாகாது.

3. $a \subset \{a, b, c\}$

விடை: தவறு: ஏனெனில் ஒரு உறுப்பு ஒரு கணத்தின் பகுதிக்கணமாக இருக்க இயலாது. சரியான குறியீட்டு முறை

$\{a\} \subset \{a, b, c\}$ என்பதாகும்.

4. $a \in \{b, c, d\}$

விடை: தவறு என்பது வெளிப்படையாக விளங்கும்.

5. $\{a\} \in \{a, b, c\}$

விடை: குறியீட்டு முறை தவறு. $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ என்பதே சரி.

a. $\{a, b, a, b, c, a, b, c, a, b\}$. என்ற கணத்தை மிகச் சுருக்கமாக எழுதுக.

விடை: $\{a, b, c,\}$

(c) $A \subset A \subset C \subset D$ என்பதற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

விடை: $D = \{x : x =$ கூட்டு முழு எண்$\}$
$C = \{x : x =$ இரட்டைப்படை முழு எண்$\}$
$B = \{x : x =$ இரட்டைப்படை எண்களின் இரண்டாம் படி$\}$
$A = \{x : x =$ இரட்டைப் படை எண்களின் 4-ஆம்படி$\}$

இப்பொழுது

$D = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
$B = \{4, 16, 36, 64, \ldots\}$
$A = \{16, 256, \ldots\}$

எனவே $A \subset B \subset C \subset D$ என்பது விளங்கும்.

(d) பின்வரும் மூன்று கணங்கள் சமமா, அல்லது உப கணங்களாவெனக் கூறுக.

$X = \{x : x$ என்பது $LEAP$ என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்து$\}$

$Y = \{x : x$ என்பது $APPEAL$ என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்து$\}$

$Z = \{x : x$ என்பது LAP என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்து$\}$

விடை : ஈண்டு

$$X = \{ L, E, A, P \} \qquad = \{A, E, L, P \}$$
$$Y = \{A, P, P, E, A, L\} = \{ A, E, L, P \}$$
$$Z = \{ L, A, P \} \qquad = \{ A, L, P \}$$

எனவே

$$X \subseteq Y \; ; \quad Z \underset{\neq}{\subset} Y ; \quad Z \underset{\neq}{\subset} X$$

என்ற மூன்றும் பொருந்தும்.

பயிற்சி 1.

1. 30 முதல் 40 வரை உள்ள முழு எண்களில் பின்வரும் உபகணங்களை எழுதுக.

(i) ஒற்றைப்படை முழு எண்கள்

(ii) குறையெண்கள்

(iii) இரட்டைப்படை எண்கள்

(iv) முழு எண்களின் படிகள்

2. ‘ தேரு வருதே ’ என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களின் சுருக்கமான கணம் என்ன ?

3. $\{ a, b, c, d \}$ என்ற கணத்தின் எல்லா ஒழுங்கான உபகணங்களையும் எழுதுக.

4. பின் வருவன சரியா, தவரு என்பதைக் கூறுக.

(i) $\{ a, b, c, d \} \supset \{ a, b, c, a, c \}$

(ii) $\{ 1, 2, 3, 4\} \supset \{ 1^2, 2^2 \}$

(iii) $\{ 1, 2 \} \in \{1, 2, 3\}$

(iv) $\{1^3, 2^2, 3^3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(v) $a \in \{a, \{a\} \}$

(vi) $A \subset A$

(vii) $A \supset A$

5. $A \subset B$, $B \subset C$ ஆனுல் $A \subset C$ என்பது சரியா ?

6. $A \supset$, $B \supset C$ ஆனுல் $A \supset C$ என்பது சரியா ?

7. $A = \{ x :$ இந்தியக் குடிமகன் $\}$

$B = \{ x : x$ தமிழ் நாட்டின் குடிமகன் $\}$

$A \subset B, B \subset A$ இவைகளில் எது பொருந்தும் ?

8. A, B எனக் கீழே அடுத்தடுத்து அல்லது ஒரே வரியில் கொடுக்கப்பட்ட கணங்களில் $A \subset B, A \supset B, A = B, A \neq B$ என்ற எது பொருந்துமெனக் கூறுக :

(i) $A = \{a, b, c\}$ $B = \{a, b, c, d, e\}$

(ii) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$

(iii) $A = \{o, o, o\}$ $B = \{o\}$

(iv) $A = \{l, m, n\}$ $B = \{$lead, moon, nail$\}$

(v) $A = \{ x: x = 2$ என்ற எண்ணை கீழெண்ணாகக் கொண்ட தகு, தகா பின்னம்

$B = \{ x : x = 4$ என்ற எண்ணை கீழெண்ணாகக் கொண்ட தகு, தகா பின்னம் $\}$

(vi) $A = \{ x : x =$ குறை முழுயெண் $\}$

$B = \{ x : x =$ கூட்டு முழு எண் $\}$

9. 1, 2, 3, ... , 20 என்ற 20 முழு எண்களைக் கொண்டு

(i) இரண்டு சமகணங்கள் எழுது (5 உறுப்புக்கள்)

(ii) $A \subset B \subset C \subset D \subset E$ என ஐந்து கணங்கள் எழுது.

(iii) $A = \{ x : x =$ மூன்றால் வகுபடக் கூடிய முழு எண் $\}$

$B = \{ x : x =$ இரண்டால் வகுபடக்கூடிய முழு எண் $\}$

என்பதை எழுதி $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ என்ற தொடர்போடு A_1, B_1 என இரு கணங்கள் எழுதுக.

10. $\emptyset, \{o\}, \{\emptyset\}$ என்ற மூன்றிற்கும் உள்ள ஒற்றுமை, வேற்றுமைகள் என்ன ?

II. கணங்களை ஒட்டிய செயல்கள்

(Operations with Sets)

2.0 கூட்டு முழு எண்களை எடுத்துக் கொண்டால் அதில் கூட்டல், பெருக்கல் என்ற செயல்கள் உள்ளன. இதைப் போல் எந்த எண்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் கூட்டல், பெருக்கல் என்ற இரு செயல்கள் உள்ளன. [கழித்தலும், வகுத்தலும் ஒரு வகைக் கூட்டலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் முறையே சமமான செயல்கள் தாம்]. இதைப்பேல் கணங்களை எடுத்துக்கொண்டால் அக்கணங்களிலும் உபகணங்களிலும் சில 'செயல்'களை நாம் வரையறை செய்ய இயலும். பொதுவாகப் பல கணங்களை எடுத்துக் கொண்டு அவைகளில் பிணைப்பு, வெட்டு போன்ற செயல்களை வரையறை செய்வோம்.

2.1 : கணப்பிணைப்பு [Set Union]

2.11 வரையறை : (கணப்பிணைப்பு). A, B என்ற இரு கணங்களின் பிணைப்பு $A \cup C$ என்ற குறியீட்டால் கூறப்படும். அப்பிணைப்புக் கணத்திலுள்ள உறுப்புக்கள், A இல் இருக்கலாம், B இல் இருக்கலாம, அல்லது A, B இரண்டிலும் இருக்கலாம். அப்பிணைப்புக் கணத்தை, A பிணைப்பு (union) B என்று படிப்போம். எனவே

$A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B$ அல்லது $x \in A, B$ இரண்டும் $\}$

எடுத்துக் காட்டுகள் :-

(i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

(ii) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{3, 4, 5\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(iii) $A = \{ x : x =$ கூட்டு முழுஎண் $\}$

$B = \{ x : x =$ குறை முழுஎண் $\}$

$A \cup B = \{ x ; x =$ முழு எண் $\}$.

(iv) $A = \{$ பந்து, மட்டை $\}$

$B = \{$ பந்து, மட்டை, விளையாட்டுக்காரர் $\}$

$A \cup B = \{$ பந்து, மட்டை, விளையாட்டுக்காரர்$\}$

எனவே எடுத்துக்காட்டு (i) இலிருந்து B என்னும் கணம் A இன் உபகணமாக இருப்பின்

$A \cup B = A$

என்றும், எடுத்துக் காட்டு (iv) இலிருந்து A என்னும் கணம் B இன் உபகணமாக இருப்பின் $A \cup B = B$ என்றும் விளங்கும். இதைப் பின்வரும் தேற்றமாகக் கூறலாம்.

2.12 தேற்றம் : (i) $A \subset B$ என்றால் $A \cup B = B$

(ii) $B \subset A$ என்றால் $A \cup B = A$.

மேலும் $\emptyset$ எல்லா கணங்களுக்கும் உபகணமாக இருப்பதால் $\emptyset \cup A = A$ என்ற உண்மை, A எந்த கணமாக இருப்பினும் பொருந்தும்.

2.13 தேற்றம்: கணப்பிணைப்பு மாற்று விதிக்கு (Commutative Law) உட்பட்டது. அதாவது

$A \cup B = B \cup A$

என்பது A, B என்ற எந்த இரு கணத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும் உண்மையாம்.

இத்தேற்றத்தின் தெரிப்பைப் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டால் விளங்கிக் கொண்டால் போதுமானது.

$A = \{ a, b, c\}$ என்றும் $B = \{ d, e, f\}$ என்றும் கொள்க. எனவே $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ என்றாகும்.

மேலும்

$B \cup A = \{ d, e, f, a, b, c\}$

$= \{ a, b, c, d, e, f \}$ [1.51 காண்க]

$= A \cup B$

2.14 தேற்றம் : கணப் பிணைப்பு தொகுப்பு விதிக்கு (Associative Law) உட்பட்டது. அதாவது

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. என்பதாம்.

இதன் தெரிப்பையும் ஒரு எடுத்துக்காட்டு கொண்டு ஈண்டு விளக்குவோம்.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 2\}$, $C = \{4, 5\}$,

எனக் கொள்வோம். எனவே

$$A \cup (B \cup C) = A \cup \{2, 3, 4, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

இதைப்போலவே

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$= A \cup (B \cup C)$$

2.2 கணவெட்டு (Set Intersection) :

2.21 வரையறை : A, B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவாக உள்ள உறுப்புக்களின் கணம் A, B-இன் கணவெட்டு என்பதாம்.

இதை $A \cap B$ என்று குறியிடுவோம். படிக்கும்பொழுது A வெட்டு (intersection) B என்று படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$A = \{a, b, c, d\}$ என்றும் $B = \{g, c, d\}$ என்றால் $A \cap B = \{c\ d\}$.

2.22 தேற்றம் : கணவெட்டு மாற்று விதிக்கு உட்பட்டது. அதாவது $A \cap B = B \cap A$.

இதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டைக் கொண்டு விளக்குவோம்

$A = \{4, 6, 8, 10, 12\}$ என்றும்

$B = \{8, 10, 12, 14, 16\}$ என்றும் கொள்வோம்.

எனவே $A \cap B = \{8, 10, 12\}$ இதைப்போலவே

$B \cap A = \{8, 10, 12\}$.

ஆகவே $A \cap B = B \cap A$ என்று கிட்டும்.

2.23 தேற்றம் : கணவெட்டு, தொகுப்பு விதிக்கு உட்பட்டது. அதாவது $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

இத்தேற்றத்தின் தெரிப்பைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு கொண்டு கொடுப்போம்.

$A = \{4, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{8, 9, 14, 16\}$ $C = \{8, 19, 20\}$ என்றும் கொண்டால்

$$A \cap (B \cap C) = A \cap \{8\}$$
$$= \{8\}$$

மேலும்

$$(A \cap B) \cap C = \{8, 9\} \cap \{8, 19, 20\}$$
$$\{8\}$$

எனவே

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

என்பது வெளிப்படையாக விளங்கும்.

2. 24 தேற்றம் : $B \subset A$ என்றால் $A \cap B = B \cdot A \subset B$ என்றால் $A \cap B = A$ என்பதாம்.

$A = \{a, d, c, d, e, f\}$ என்றும் $B = \{e, f\}$ என்றும் கொண்டால் $B \subset A$ என்றாகின்றது. மேலும்

$$A \cap B = \{e, f\} = B$$

என்பது வெளிப்படை. இதைப் போலவே

$$A = \{2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 3. 5, 6\}$$

என்றால் $A \subset B$ என்றாகின்றது. மேலும் $A \cap B = \{2, 3, 4\} = A$ என்ற உண்மை வெளிப்படை.

எனவே இதுவரை கணப் பிணைப்பும், கண வெட்டும் நாம் இயற்கணிதத்தில் பயன் படுத்திய, கூட்டல் பெருக்கல் போல் மாற்று விதிக்கும் $(a + b = b + a,\ a \times b = b \times a)$ தொகுப்பு விதிக்கும் $[a+(b+c) = (a+b)+c\ ;\ a\times(b\times c) = (a\times b)\times c]$ உட்பட்டது எனக் கண்டோம்.

2·25 வரையறை :- இரண்டு கணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று பொதுவற்றது (Disjoint) என்றால் A, B இரண்டிற்கும் ஒரு உறுப்பு கூட பொதுவாக இல்லாமல் இருப்பதாம். இதை நாம்

$$A \cap B = \varnothing$$

என்று எழுதுவோம். அதாவது A, B இரண்டும் பொதுமை யற்றது என்றும் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$$A \cap B = \varnothing$$

(ii) $A = \{x : x =$ கூட்டு முழு ஒற்றைப் படை எண் $\}$

$B = \{x : x =$ கூட்டுமுழு இரட்டைப் படை

இங்கு $A \cap B = \varnothing$ என்பதைக் காண்க.

2. 3 பங்கீட்டு விதி (Distributive Law).

கண இயற் கணிதத்தில் இதுவரை நாம் பிணைப்பு, வெட்டு என்ற இரு 'செயல்' களை வரையறை செய்து அவற்றின் பண்புகளைக் கண்டோம். இந்த இரு 'செயல்'களை இணைக்கும் பங்கீட்டு விதிகளைப் பின்வரும் தேற்றத்தால் அறியலாம்.

2·31 தேற்றம் :

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

இத்தேற்றத்தின் தெரிப்பை எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டு நிறுவுவோம்.

(i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

எனவே $B \subset C = \{4, 16\}$. மேலும்

$A \cup (B \cap C) = \{x : x = 1$ முதல் 9வரை, $16\}$ (a)

$A \cup C = \{x : x = 1$ முதல் 9 வரை, $16, 25\}$

$A \cup C = \{x : x = \{1$ முதல் 6வரை, $10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

எனவே

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{x ; x = 1$ முதல் 9வரை, $16\}$ (b)

ஆகவே

$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$ [(a), (b) ஒப்பிடுக]

(ii) $A = \{x : 0 < x < 100,\ x$ முழு எண் $\}$

$B = \{x : 0 < x < 10,\ x$ முழு எண் $\}$

$C = \{x : -10 < x < o,\ x$ முழு எண் $\}$

இப்பொழுது

$B \cup C = \{x : -10 < x < 10,\ x$ முழு எண் $\}$

$A \cap (B \cup C) = \{x : 0 < x < 10,\ x$ முழு எண் $\}$ (a)

$A \cap B = \{x : 0 < x < 10,\ x$ முழு எண்

$A \cap C = \varnothing$

எனவே $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{x.\ 0\angle x\angle 10,\ x$ முழு எண்$\}$ (b)

ஆகவே

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C). \quad \left[(a), (b) \text{ ஒப்பிடுக}\right]$$

குறிப்பு:- 2.31 இலிருந்து கண இயற்கணிதத்தில் இரு பங்கீட்டு விதிகள் உள்ளன என்று அறிகின்றோம். ஆனால் இயற்கணிதத்தில் $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ என்ற பங்கீட்டு விதி தான் உண்மை. $a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$ என்ற பங்கீட்டு விதி உண்மையாகாது. எடுத்துக்காட்டாக

$a=1,\ b=2,\ c=3$ என்று கொண்டால்

$a+(b\times c)=1+2\times 3=1+6=7$

ஆனால் $(a+b)\times(a+c)=(1+2)\times(1+3)$

$=3\times 4$

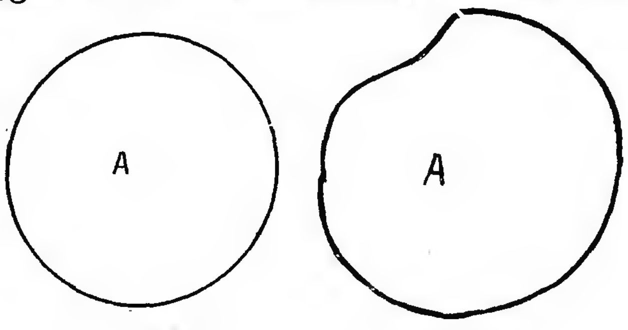
$=12$

எனவே $a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$ என்பது எப்பொழுதும் உண்மையல்ல.

குறிப்பு 2: நாம் மாற்று விதி, தொகுப்பு விதி, பங்கீட்டு விதி இவைகளை எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டு விளக்கினேம். ஆனால் அவை A, B, C எத்தகைய கணங்களாக இருப்பினும் உண்மையாகும். இத்தகைய தெரிப்பை மேல்வகுப்பில் காணலாம்.

2.4 வென் படங்கள் (Venn Diagrams).

ஒருகணம் புள்ளிகளாலானது என்று கொள்வது பல விளக்



படம் 2·41 படம் 2·42

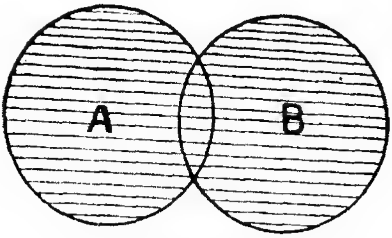
கங்கள் பெற ஒரு வசதியான முறையாகும். ஆனால் புள்ளி

களுக்கும் கணங்களின் உறுப்புக்களுக்கும் ஒருவித தொடர்பும் இல்லை. எனினும் இந்த முறைப்படி படங்கள் கொண்டு கண வியலில் பல உண்மைகளைக் கண்கூடாகப் பார்க்கமுடியும். சாதாரணமாக, ஒரு வட்டத்தின் உள்ளே இருக்கும் புள்ளிகள் யாவும் ஒரு கணம் எனக்கொள்வது மரபு (படம் 2·41); அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட மூடியவளைவரைக்குள் இருக்கும் புள்ளிகள் யாவும் ஒரு கணம் எனக் கொள்வது மரபு (படம் 2.42).

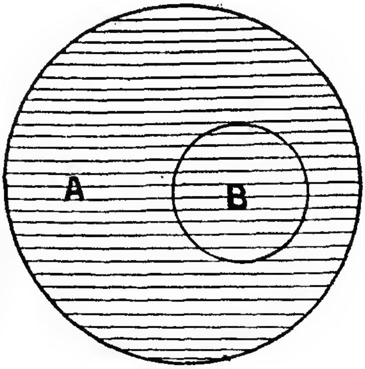
மேற்கண்ட படங்கள் [படம் 2.41, படம் 2.42] ஓரேர் கணத்தைக் குறிக்கும். இம்மரபுப்படி வென் படங்கள் என கணவியலில் படங்கள் வரைந்து கணங்களின் பண்புகளை அறியலாம். இவ்வகையான வரைபடங்கள் 'வென்' படங்கள் எனப்படும்.

ஆனால் இந்த வென் படங்கள் கணவியலில் பல முற்றொரு மைகளையும் தேற்றங்களையும் விளக்கிக் கொள்ளவும், சரிபார்த்துக் கொள்ளவும் பயன்படுமேயல்லாமல், அவை முறைப்படி நிறுவப்பட்ட முற்றொருமைகள் அல்லது தேற்றங்கள் எனக் கொள்ளல் தவறும்.

2·41 கணப்பிணைப்பு (வென்படம்)



படம் 2-411

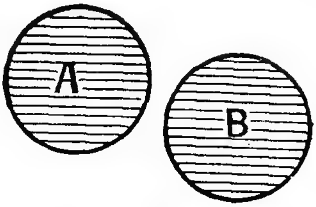


2.412

படம் **2.411**-இல் கோடிட்ட பகுதி $A \cup B$ ஐக்குறிக்கும். இங்கு $A.B$ இரண்டுக்கும் பொது உறுப்புக்கள் உள்ளன.

படம் **2.412** இல் கோடிட்ட பகுதி $A \cup B$ ஐக் குறிக்கும். இங்கு B, A இன் உபகணமாக இருப்பதைக் காண்க. ($A \cup B = A$)

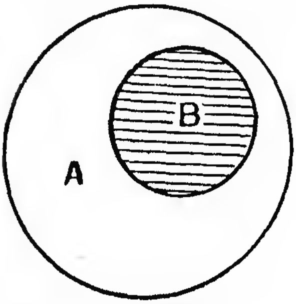
படம் 2. 413 இல் கோடிட்ட பகுதி $A \cup B$ ஐக் குறிக்கும்.



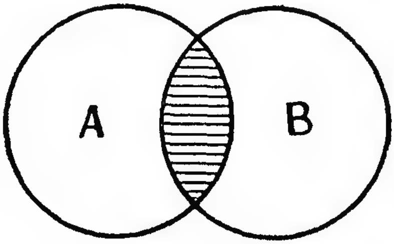
படம் 2.413

இங்கு A, B இரண்டும் பொதுமையற்ற கணமாகின்றன.

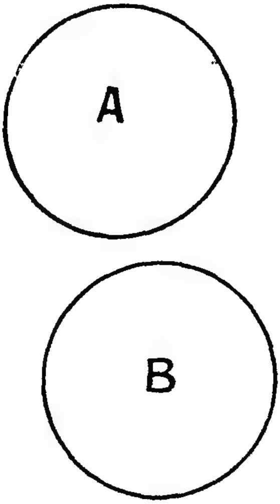
2.42 கணவெட்டு (வென்படம்)



படம் 2.421



படம் 2.422



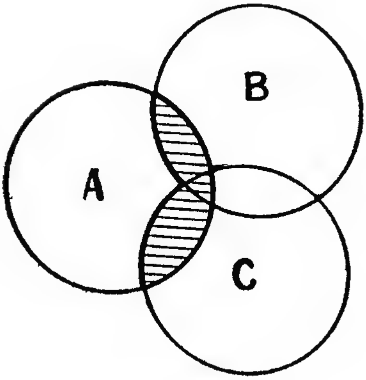
படம் 2.423

படம் 2.421 : கோடிட்ட பகுதி $A\cap B$ ஐக் குறிக்கும்.

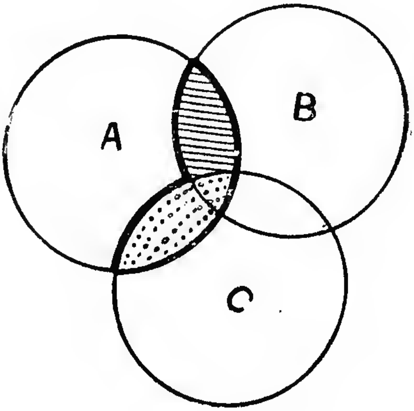
2.422 : கோடிட்ட பகுதி $A\cap B$ஐக் குறிக்கும். இங்கு $B\subset A$ என்றிருத்தலால் $A\cap B=B$ என்பதைக் காண்க.

படம் 2.423 : இங்கு A, B இரண்டும் பொதுமையற்றவை என்பது வெளிப்படை. ($A\cap B=\emptyset$).

2.43 பங்கீட்டு விதி (வென்படம்)



படம் 2.431



படம் 2.432

படம் 2.431 : இதில் $B\cup C$ என்பது மொத்தமான கோட்டினால் ஆன பகுதிக்கு உட்பட்ட புள்ளிகள். $A\cap(B\cup C)$ என்பது கோடிட்ட பகுதியாம்.

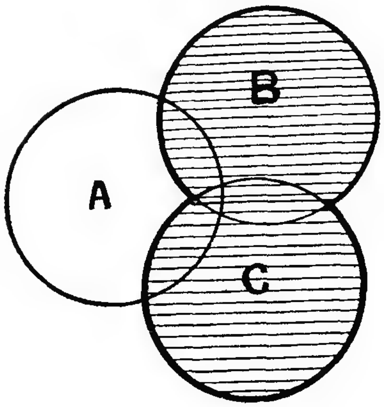
படம் 2.432 : $A\cap B$ என்பது கோடிட்ட பகுதி. $A\cap C$ என்பது புள்ளியிட்ட பகுதி. $(A\cap B)\cup(A\cap C)$என்பது மொத்தமான கோட்டினால் ஆன பகுதியாம். மேற்கண்ட படங்கள் இரண்டிலிருந்தும்

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

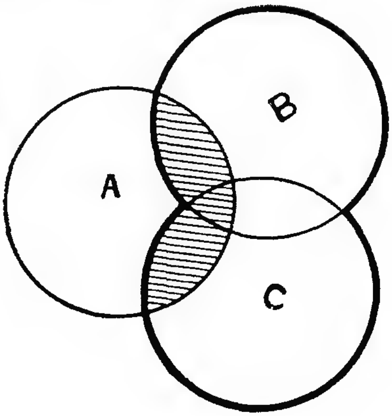
என்பதைக் காண்க.

2.43(A) மற்ருேர் முறையில் பங்கீட்டு விதியை வென் படம் கொண்டு பின்வருமாறு படிப்படியாகக் காண்போம்.

படம் 2.433 இல் $B \cup C$ கோடிட்ட பகுதியாகும்.



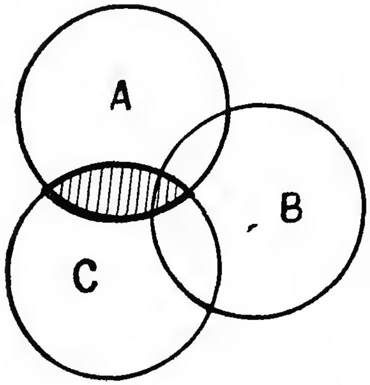
படம் 2.433



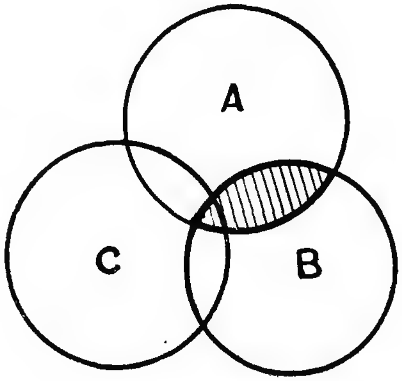
படம் 2.434

படம் 2.434 இல் $A \cap (B \cup C)$ கோடிட்ட பகுதியாகும்.

மேலும்



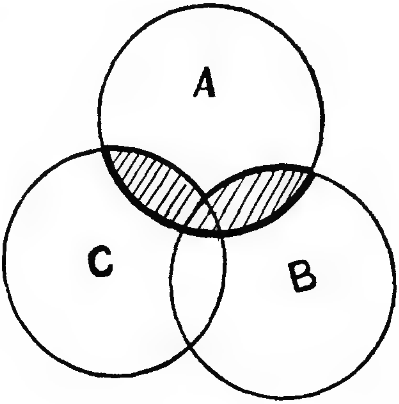
படம் 2.435



படம் 2.436

படம் 2.435 இல் $A \cap B$ என்பது கோடிட்ட பகுதியாகும்.
படம் 2.436 இல் $A \cap C$ என்பது கோடிட்ட பகுதியாகும்.

படம் 2.437 இல் $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ கோடிட்ட பகுதியாகும். மேலும் படம் 2.434, 2.437 இலிருந்து



படம் 2.437

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

என்பது வெளிப்படையாகத் தெரிகின்றது.

2.5 பல கணங்களின் பிணைப்பும் வெட்டும் (Union and intersection of many sets)

நாம் 2.14 இல் கணப்பிணைப்பு தொகுப்பு விதிக்கு உட்பட்டது என்று பார்த்தோம். அதாவது

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

என்று நிறுவினோம். இதன் பொருள் B, C இன் பிணைப்போடு Aயின் பிணைப்பு சேர்க்க வரும் கணமும், A, Bஇன் பிணைப்போடு C இன் பிணைப்பு சேர்க்க வரும் கணமும் சமமாம். ஆகவே $B \cup C$க்கும் Aக்கும் இடையே உள்ள அடைப்பை நீக்கி $A \cup B \cup C$ என்றே எழுதலாம். எனவே அடைப்புகளால் எவ்வித பயனும் இல்லை. இதைப்போலவே $A_1, A_2, \ldots, A_n$, (n திட்டமான முழு எண்), என்ற n கணங்களை எடுத்துக்கொண்டு இதன் பிணைப்பை அடைப்புகளில்லாது

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

என்று எழுதலாம். இப்பிணைப்பைச் சுருக்கமாக

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

என்று எழுதலாம். மேலும் இதைப் படிக்கும்பொழுது பிணைப்பு $i=1$ முதல் n வரை A_i என்று படிப்பது மரபு.

இதைப்போலவே வெட்டு என்ற கணச்செயலை எடுத்துக் கொண்டாலும் 2.23 இலிருந்து

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

என்பது தெரிந்ததே. எனவே ஈண்டும் அடைப்புக்களை நீக்கி விட்டு $A \cap B \cap C$ என்று A, B, C இன் வெட்டை எழுதலாம். மேலும் $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (n திட்டமான முழு எண்) என்ற n கணங்களின் வெட்டை

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

என்று எழுதலாம். இதைச் சுருக்கமான முறையில்

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

என்று குறியிடலாம். படிக்கும் பொழுது வெட்டு $i=1$ முதல் n வரை A_i எனப் படிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $A=\{a, b, c\}$; $B=\{c, d, e\}$; $C=\{e, f, g\}$ $D=\{g, h, k\}$ என்றால் $A \cup B \cup C \cup D$ ஐக் காண்.

முதலில், $C \cup D = \{e, f, g, h, k\}$ எனவே

$$B \cup (C \cup D) = \{c, d, e, f, g, h, k\} \text{ என்றாகும்}$$

மேலும்

$$A \cup (B \cup (C \cup D)) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$$

எனவே

$$A \cup B \cup C \cup D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}.$$

குறிப்பு :

பிணைப்புகள் எந்த வரிசையிலும் செய்யலாம்.

2. $A_1 = \{x: x =$ கூட்டு ஒற்றைப்படை முழு எண்$\}$

$A_2 = \{x: x =$ குறை ஒற்றைப்படை முழு எண்$\}$

$A_3 = \{x: x =$ கூட்டு இரட்டைப்படை முழு எண்$\}$

$A_4 = \{x: x =$ குறை இரட்டைப்படை முழு எண்$\}$

என்றால் $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{x: x$ ஒரு முழு எண்$\}$ எனக் காண்க.

$A_1 \cup A_2 = \{x: x =$ ஒற்றைப்படை முழு எண்$\}$

$A_3 \cup A_4 = \{x: x =$ இரட்டைப்படை முழு எண்$\}$

எனவே

$$(A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cup A_4) = \{x: x = \text{ஒரு முழு எண்}\}$$

ஆகவே அடைப்புக்களை நீக்கினால்

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{x: x = \text{ஒரு முழு எண்}\}.$$

3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 3\}$ என்றால் $A \cap B = ?$

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

4. $A = \{$ப, ர, ம, சி, வ, ம்$\}$; $B = \{$சி, வ, ம்$\}$ எனின் $A \cap B = ?$

$A \cap B = \{$சி, வ, ம்$\}$

5. $A = \{$ம, ர, ம்$\}$, $B = \{$ம, ற, ம்$\}$ என்றால் $A \cap B = ?$

$A \cap B = \{$ம, ம்$\}$.

6. $A = \{g, o, d\}$; $B = \{a, n, g, e, l\}$

$$A \cap B = \{g\}$$

7. $A = \{x: o \leq x \leq 3\}$; $= \{x: 1 \leq x \leq 4\}$ என்றால் $A \cap B = ?$

$$A \cap B = \{x: 1 \leq x \leq 3\}$$

8. $A_1 = \{A, P, P, A, L, L, I, N, G\}$

$A_2 = \{A, I, L, I, N, G\}$

$A_3 = \{G, A, L, L, I, N, G\}$

$A_4 = \{K, I. N, G\}$

என்றால் $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = ?$

$A_1 \cap A_2 = \{A, I, L, N, G\}$ சுருக்கமாக

$(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = \{A, I, L, N, G\}$ சுருக்கமாக

எனவே

$$(((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cap A_4) = \{I, N, G\}$$

ஆகவே

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{I, N, G\}.$$

9. $A_1 = \{x: 1 \leq x \leq 10000, x$ முழு எண்$\}$

$A_2 = \{x: x$ சரியான இருபடி முழு எண்$\}$

$A_3 = \{x: 100 \leq x \leq 200, x$ முழு எண்$\}$

என்றால் $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{100, 121, 144, 169, 196\}$ எனக்காட்டுக.

$$A_2 \cap A_3 = \{100, 121, 144, 169, 196\}$$

எனவே

$$A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = \{100, 121, 144, 169, 196\}.$$

பயிற்சி 2

1. $=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 5\}$; $C=\{2, 4, 6\}$ ஆனால்

   a) $A\cap B=?$

   b) $A\cap C=?$

   c) $A\cup(B\cap C)=?$

2. பின் வருவனவற்றை ஓரிரு எடுத்துக் காட்டுகள் கொண்டு நிறுவுக.

   a) $A\cap B\subset A$

   b) $A\cup B\supset A$

   c) $A\cup B=A\cap B$ ஆனால் $A=B$ என்பது சரி.

   d) $A\cap A=A$

   e) $B\subset A$ ஆனால் $A\cap B=B$ என்பது சரி.

   f) $A\cup\varnothing=A$

   g) $A\cap\varnothing=\varnothing$

3. $A=\{L, E, A, P\}$; $B=\{A, P, P, L, Y\}$ $C=\{Y, A, L, E\}$ என்றால்

   $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ என நிறுவுக.

4. $A=\{M, A, R, R, I, A, G, E\}$; $B=\{C, A, R, R, Y\}$
   $C=\{P, A, R, R, Y\}$ எனில்

   a) $A\cup B=?$

   b) $B\cap C=?$

   c) $(A\cap B)\cup C=?$

   d) $(A\cap B)\cap C=?$

   e) $A\cap(B\cap C)=?$

   f) $(A\cup B)\cup C=B\cup(A\cup C)$ என நிறுவுக.

   g) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ என நிறுவுக

   h) $(A\cap C)\cup B=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ என நிறுவுக.

III. நிரப்பிச் செயல், கண வேறுபாடு

(Complementotion, difference)

3·1 கண நிரப்பி (Complement of a set)

கண நிரப்பியை வரையறை செய்யுமுன் முழுமைக் கணம் என்ருல் என்ன என்று பார்ப்போம். முழுமைக் கணம் என்று கூறும்பொழுது அம்முழுமையை நாம் கற்பனை செய்து பார்க்க முடியாத அளவு பெரிது என்ற பரந்துபட்ட பொருளில்தான் பொதுவாகக் கொள்கிருேம்—அதாவது அம்முழுமைக் கணத்திற்கு அப்பாற்பட்ட ஒரு பொருளுமே இல்லை. இம்முழுமைக் கணத்தை E என்று குறியிடுவோம். ஆகவே எந்த உறுப்பும் E இல் இருக்கின்றது என்று நாம் கொள்ளுவது மரபாகும். (3·2 காண்க)

3·11 பொதுவரையறை : கணநிரப்பி A இன் கண நிரப்பியானது A இல் அல்லாத E உறுப்புக்களைக் கொண்ட கணமாகும். இதை A' என்று குறிப்பிடுவோம். அதாவது

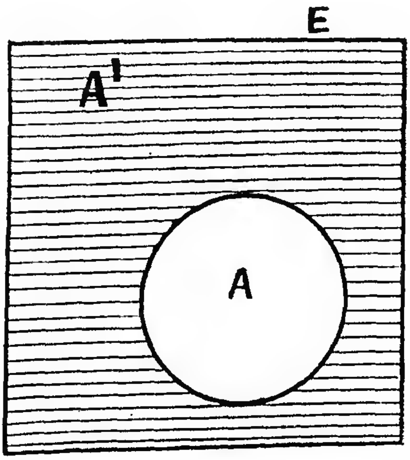
$$A' = \{ x : x \in E, x \notin A \}$$

A' என்பது E இன் பகுதி கணமாகின்றது. எனவே x என்ற E இன் உறுப்பு A இலோ அல்லது அதன் நிரப்பி A' இலோ இருத்தல் வேண்டும். மேலும் $x \in E$ எனில் $x \in A$ அல்லது $x \in A'$. $x \in A$, $x \in A'$ என்ற இரண்டும் ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வது முடியாது. எனவே

$A \cap A' = \varnothing$ என்றும் $A \cup A' = E$ என்றும் விளங்குகின்றது. இதை வென்படங்கொண்டு கண்கூடாகக் காணலாம்.

3.12 கண நிரப்பி (வென்படம்)

E என்ற முழுமைக் கணத்தை எப்பொழுதும் ஒரு சதுரத்தால் குறியிடுவோம். எனவே படம் 3·12 இல் A என்பது வட்டப்புள்ளிகளையும், A' என்பது கோடிட்ட பகுதியையும் குறிக்கும்.



படம் 3·12

$A \cap A' = \emptyset$ என்றும்

$A \cup A' = E$ என்றும் பார்த்தாலே புரியும்.

ஒரு கணத்தின் கண நிரப்பியைப்பற்றி இதுவரை பார்த்தோம். ஆனால் A, B என்ற இருகணங்களை எடுத்துக் கொண்டால் $A \cup B$, $A \cap B$ என்ற இரு கணங்களின் கண நிரப்பிகளைப்பற்றி பின்வரும் தேற்றத்திருந்து அறியலாம்.

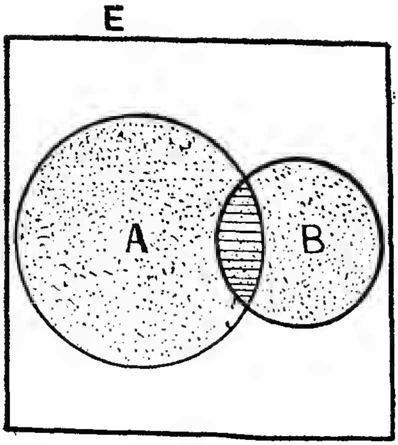
3·13 தேற்றம் டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws)

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

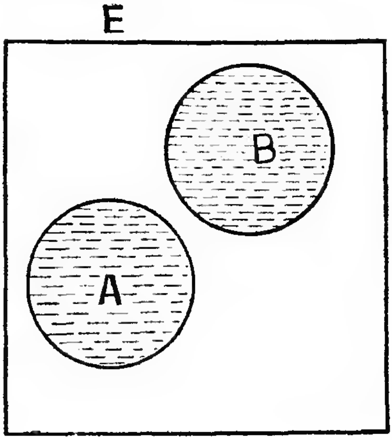
(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

இத்தேற்றத்தின் தெரிப்பை வென்படம் வரைந்து நிறுவுவோம்.

படம் 3·13 இல் $A \cup B$ புள்ளியிட்ட பகுதியுடன்



படம் 3·13



படம் 3·14

கோடிட்ட பகுதியும் ஆகும். எனவே $(A \cup B)'$ என்பது சதுரத்தில் வெண்மையான பகுதியாகும்.

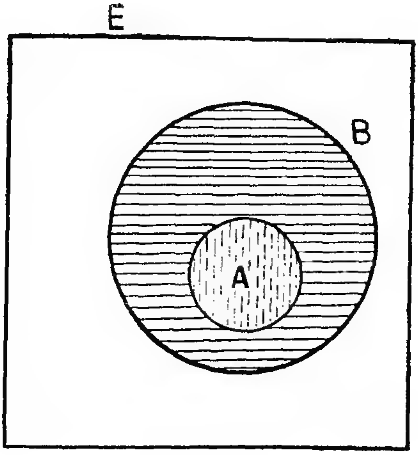
மேலும் A' என்பது A இல் புள்ளியிட்ட பகுதியும், கோடிட்ட பகுதியும் நீங்கலாக உள்ள பகுதி, அதாவது E இல் வெண்மையான பகுதியும் B இல் புள்ளியிட்ட பகுதியும் சேர்ந்ததாகும். (i) இதைப் போலவே B' என்பது A இல் புள்ளயிட்ட பகுதியும், E இல் வெண்மையான பகுதியும் சேர்ந்ததாம். எனவே (i) உம் (ii) உம் வெட்டும் பகுதி $A' \cap B$· அதாவது E இல் வெண்பகுதி. எனவே $(A \cup B)'$
$= A' \cap B'$

மேலும் $A \cap B$ என்பது படம் 3· 3 இல் கோடிட்ட பகுதியாகும். எனவே $(A \cap B)'$, E இல் கோடிட்ட பகுதியைத் தவிர மற்ற எல்லா பகுதியாகும். $A' \cup B'$ என்பது மேலே கூறியவற்றிலிருந்து E இல் கோடிட்ட பகுதியைத் தவிர எல்லாம் என்றும் வெளிப்படையாகத் தெரிகின்றது.

இத்தேற்றத்தின் தெரிப்பை 3·14 ஐக் கொண்டும் நிறுவ இயலும். இப்படத்தின் கண் A, B இரண்டும் பொதுமையற்ற கணம் என்பது வெளிப்படை.

பின்வரும் தேற்றத்தை வென்படத்தால் மிக எளிதாக அறியலாம்.

3·41 தேற்றம் : $A \subset B$ எனில் $A' \supset B'$ என்பதாம்.



படம் 3·141

படம் 3·141 இல் A' என்பது E இல் வெண்மையான பகுதியும் கோடிட்ட பகுதியுமாகும். (A என்ற கணம் புள்ளியால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.) B' என்பது E இல் வெண்மையான பகுதியாகும். எனவே $A' \supset B'$ என்பது வெளிப்படை.

3.2 பொருத்த நிரப்பி (Relative Complement)

3·1 இல் A இன் கண நிரப்பி என்னவென்று வரையறுத்துக் கூறுதுவிட்டோம். ஆனால் நாம் எப்பொழுதும் ஒரு குறிப்பிட்ட கணம் என்று கூறும்பொழுது அதற்கு அடிப்படையாக நாம் அறிந்தோ அறியாமலோ ஒரு பெரிய கணத்தை மனதில் கொண்டுதான் நாம் முதற்கூறியக் கணத்தைக் குறிப்பிடுகின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக

1. செங்கோண முக்கோணங்கள் என்ற கனத்தைக் கொள்ளும் பொழுது பின்னணியில் முக்கோணம் என்ற கணம் இருப்பதை நாம் உணர்கிறோம்

2. முழு எண்கள் என்ற கணத்தைக் கொள்ளும் பொழுது பின்னணியில் எண்கள் என்ற கணம் இருப்பதை நாம் உணர்கிறோம்.

முக்கோணங்கள் என்ற கணத்தின் செங்கோண முக்கோணங்கள் என்ற பகுதிக் கணத்தில் நிரப்பி செங்கோண

மற்ற முக்கோணங்களாகும். ஒழுங்கான பல்கோட்டுருவங்கள் என்ற கணத்தில் சமபக்க முக்கோணங்கள் என்ற கணம் உப கணமாகின்றது. இதன் நிரப்பி, ஒழுங்கு முக்கோட்டுருவத்தைத் தவிர மற்றெல்லா ஒழுங்கு பல கோட்டுருவங்களாகும். அதாவது ஒரு கணத்தின் நிரப்பி அது எந்த கணத்தின உப கணமாகின்றது என்பதைப் பொருத்துத்தான் கூற இயலும். எனவே நமக்குப் பின்வரும் வரையறை கிடைக்கின்றது.

3·21 வரையறை (பொருத்த நிரப்பி) (Relative Complement) B என்ற கணம் A இன் உபகணமாக இருந்து, B இல் இல்லாத A இல் மாத்திரம் உள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்ட கணத்திற்கு B இன் நிரப்பி என்று பெயர். இதை $C_A(B)$ எனக் குறியிடுவோம்.

$$C_A(B) = \{ x \in A \mid x \notin B \}$$

இதை A இன் முழுமையில் B இன் பொருத்த நிரப்பி எனப் படிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

1. A = முக்கோணங்கள்
   B = சமபக்க முக்கோணங்கள்
   $C_A(B)$ = சமபக்க மற்ற முக்கோணங்கள்

2. A = முழு எண்கள்
   B = இரட்டைப்படை முழு எண்கள்
   $C_A(B)$ = ஒற்றைப்படை முழு எண்கள்

3. $A = \{a, b, c, d, e,\}$
   $B = \{b, c, d\}$
   $C_A(A) = \{a, e\}$

4. A = {புத்தகம், மணி, பேனு, கடிகாரம்}
   B = {மணி}
   $C_A(B)$ = {புத்தகம், பேனு, கடியாரம்}

5. A = எந்தக் கணமாயினும்
   $B = \varnothing$ ஆனல்
   $C_A(B) = A$

3·12 இல் கூறியது போலவே ஈண்டும் $B \subset A$ என்றால் $C_A(B) \cup B = A$ என்றும், $C_A(B) \cap B = \varnothing$ என்றும் புலப்படும்.

பின் வரும் அட்டவணை சில குறிப்பிட்ட கணங்களையும் அவற்றிற்குப் பொருத்தமாக நாம் ஏற்கக்கூடிய ஒரு முழுமைக் கணத்தையும் குறிக்கின்றன. நாம் முழுமைக் கணத்தைப் பொருத்து பொருத்த நிரப்பி என்ன என்று உணராம்.

குறிப்பிட்ட கணம் (A)	முழுமைக்கணம் என ஏற்கக்கூடியது. (E)
1. கூட்டு முழு எண்	எண்
2. சதுரம்	ஒரு தள நேர்க்கோட்டு உருவம்
3. வார இதழ்	பத்திரிகை
4. கணித நூல்	நூல்
5. மல்லிகை	மலர்
6. எரிமீன் (Meteors)	விண்பொருள்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $A \subseteq B$ எனின் $A' \supseteq B'$ என்பதை ஒரு எடுத்துக்காட்டால் நிறுவுக.

$E = \{x : x =$ முழு எண்$\}$

$A = \{x : x =$ கூட்டு முழு ஒற்றைப்படை எண்$\}$

$B = \{x : x =$ கூட்டு முழு எண்$\}$

என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $A \subset B$, மேலும்

$B' = \{x : x =$ குறை முழு எண்$\}$

$A' = \{x : x =$ குறை முழு எண்ணும், கூட்டு முழு இரட்டைப்படை எண்களும்$\}$

வெளிப்படையாக $B' \subset A'$ என்பது விளங்கும்.

இரண்டாவதாக $A = B$ எனக் கொள்வோம்.

$E = \{x : x =$ முழு எண்$\}$

$A = \{x : x =$ கூட்டு முழு எண்$\} = B$

எனவே $A' = \{x : x =$ குறை முழு எண்$\}$

$B' = \{x : x =$ குறை முழு எண்$\}$

ஆகவே $B' = A'$ என பெறப்படுகிறது.

2. டி மார்கன் விதியை எடுத்துக்காட்டு கொண்டு விளக்குக.

$E = \{x : x =$ முழு எண்

$A = \{x : x =$ கூட்டு ஒற்றைப்படை முழு எண் $\}$

$B = \{x : x =$ குறை முழு எண் $\}$

இவை கொடுக்கப் பட்டிருக்கின்றன. இங்கு

$A' = \{x : x =$ குறை முழு எண்ணும், கூட்டு இரட்டைப் படை முழு எண்ணும்.

$B' = \{x . x =$ கூட்டு முழு எண் $\}$

$A \cup B = \{x : x =$ குறை முழு எண்ணும், கூட்டு ஒற்றைப்படை முழு எண்ணும் $\}$

எனவே $(A \cup B)' = \{x : x =$ கூட்டு இரட்டைப் படை முழு எண் $\}$

மேலும் $A' \cap B' = \{x : x =$ கூட்டு இரட்டைப்படை முழு எண் $\}$

ஆகவே $(A \cup B)' = A' \cap B'$ என கிட்டுகின்றது.

3.3 கண வேறுபாடு: (Differences)

3.31 வரையறை: A, B என்ற இரு கணங்களுக்குப் பொதுவாக சில உறுப்புக்களிருப்பின், A இலிருந்து அப்பொது உறுப்புக்களை நீக்கிப் பெறப்படும் கணம் $A - B$ என்ற வேறுபாடு எனப்படும். அதாவது

$A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

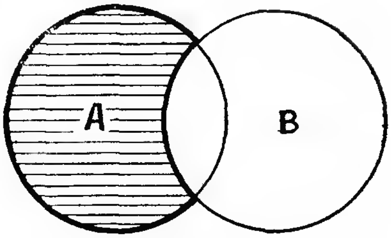
இதைப்போல் B இலிருந்து அப்பொது உறுப்புக்களை நீக்கிப் பெறப்படும் கணம் $B - A$ என்ற வேறுபாடு எனப்படும்.

A, B இரண்டிற்கும் பொது உறுப்புக்கள் இல்லையெனில் $A - B = A$, $B - A = B$ என்றும் வெளிப்படையாக விளங்கும்,

குறிப்பு: 3.21 க்கும் 3.31 க்கும் உள்ள வேறுபாட்டை மிக முக்கியமாக கவனிக்க வேண்டும்.

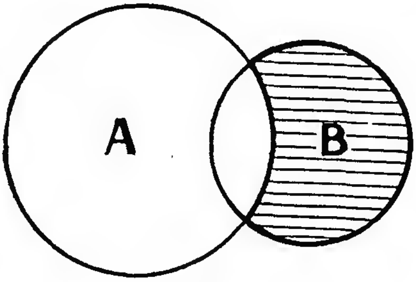
' 3.31 இல் B என்பது A இன் உபகணமாக இருக்க வேண்டியதில்லை' ஆனால் 3.21 இல் B என்பது A இன் உபகணமாக இருத்தல் வேண்டும்.

3.32 வென்வரை படம் $(A-B)$



படம் 3.321

படம் 3.321 இல் கோடிட்ட பாகம் $A-B$ ஐக் குறிக்கும். இதைப் போல்



படம் 3.322

படம் 3.322: இல் கோடிட்ட பாகம் $B-A$ ஐக் குறிக்கும்.

குறிப்பு: 1. இங்கு முழுமைக் கணத்தைப் பற்றிய கருத்தை நாம் கொண்டு வர வேண்டிய தேவையில்லை.

கண வேறுபாடு என்பது ஒரு புதிய வரையறையல்ல. $A-B$ என்பதை நோக்குமிடத்து இதை ஒரு 'பொருத்த நிரப்பி' யாகவும், வரையறை செய்யலாம். நமக்கு $A\cap B$ என்ற கணம் Aஇன் உபகணமாக இருப்பதால் $A\cap B$ என்ற கணத்தின் நிரப்பி யை A இல் கண்டால் படம் 3.321 இல் கோடிட்ட பகுதியா கும். இதைப்போலவே $B-A$ என்பது $A\cap B$ இன் B இல் கண நிரப்பியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$

$B=\{e, f, g, h, j, k\}$

ஈண்டு $A-B=\{a, b, c, d\}$ என்றும்

$B-A=\{h, j, k\}$ என்றும் விளங்கும்.

பின் வரும் தேற்றம் வெளிப்படை.

3.33 தேற்றம் : $A-A=\varnothing$.

பயிற்சி 3

1. E என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட முழுமைக் கணம். A ஒரு கணம். பின்வரும் A என்ற கணங்களுக்கு E ஒட்டிய கண நிரப்பிகள் என்ன?

a) E இந்தியப் போர்ப்படை
A இந்திய காலாட்படை

b) E சென்னையிலுள்ள மக்கள்
$A=$ சென்னையிலுள்ள மக்களில் மருத்துவப் பட்டம் பெற்றவர்கள்.

c) $E=\{x: o<x<1$ x இடைப்பட்ட மெய்யெண்$\}$
$A=\{x: y<x>1$ x இடைப்பட்ட அளவுக்கிணங்கிய எண்$\}$

d) $E=\{x: x-$ நாற்கோட்டுருவப் படம்$\}$
$A=\{x:x-$ சதுரம்$\}$

e) $E=\{x:x$ என்பது $x^6-14x^4+49x^2-36=0$ – இன் தீர்வுகள்$\}$
$A=\{x:x$ என்பது $x^3+6x^2+11x+6=0$ ன் தீர்வுகள்$\}$

2. $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$ என்றால் $A-B$ என்ன ?

3. $A-B=B-A$ எனம் கூறுவது சரியா ? இரு எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக;

4. A, B, C என்பவை கணங்கள். பின் வருவன சரியா, தவறு எனக் கூறுக.

a) $A-\varnothing=A$
b) $A-A=\varnothing$
c) $A=B$ ஆனல் $A-B=\varnothing$
d) $A-(A-B)=A\cap B$
e) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(B\cap C)$
f) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

IV. சார்புகளும் அமைப்புகளும்

(Functions and Relations)

4·1 அமைப்புகள் (Relations) :

சார்புகளைப் பற்றிப் படிக்கு முன்னர், சார்புகளின் அடிப்படையாகிய அமைப்புகள் (Relations) அல்லது வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் (ordered pairs) என்பதைப்பற்றி நாம் தெரிந்து கொள்ளுதல் மிக முக்கியமாம்.

4·11 வரையறை : A, B என்ற இரு கணங்களை எடுத்துக் கொள்க. $a \in A$, $b \in B$ எனக் கொள்க. (a, b) என்பது ஒரு வரிசைப்பட்ட இரட்டையெனப்படும். இத்தகைய எல்லா வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளைக் கொண்ட கணத்தை $A \times B$ எனக் குறியிடுவோம் எனவே

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

மேலும் (a, b) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டையானது $\left\{ \{a\}, \{a, b\} \right\}$ என்ற கணமென்பது வரையறை. எனவே $\{a\}$ என்ற ஓருறுப்புக் கணமும் $\{a, b\}$ என்ற ஈருறுப்புக் கணமும் (a, b) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டையில் உள்ளன. எனவே (b, a) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டை $\left\{\{b\}, \{(a, b)\}\right\}$ என்ற கணமாகும். ஆகவே (b, a) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டையும் (a, b) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டையும் சமமல்ல என்பதை உணர்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக் காட்டு :

$$A = \{a, b, c\}; \quad B = \{d, e, f\}$$

எனில் $A \times B = \{(a, d), (a, e), (a, f)$

(b, d), (b, e), (b, f)
(c, d), (c, e), $(c, f)\}$ என்பதாம்.

(a, b) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டையில் a என்பது முதல் ஆயத்தொலை என்றும் (First co-ordinate) b என்பது இரண்டாவது ஆயத்தொலை என்றும் (second co-ordinate) கூறப்படும். $a=b$ ஆயின் (a, a) என்பது $\{a\}$ என்ற ஓருறுப்புக் கணமாகும்.

4·12 வரையறை: இரண்டு வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் (a, b), (c, d) என்பவை சமம் என்றால்

$$a=c, \quad b=d$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் தான் உண்மை.

குறிப்பு: இங்கு = என்பது எண்களில் வரும் 'சமம்' என்பதல்ல. ஆனால் இரு உறுப்புக்களும் ஒன்றெனக் கொள்வோம் என்பது மரபு.

4·2 சார்புகள் (functions):

$y=f(x)$ என்ற சார்பு பற்றி முன்னரே சிறிது அறிவோம். இங்கு x என்ற மெய்யெண்ணோடு $f(x)$ என்ற மெய்யெண் தொடர்பு கொண்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக $y=f(x)=x^2$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொண்டால் $x=1$ ஆனால் $f(x)=1$; $x=1{\cdot}5$ ஆனால் $f(x)=2{\cdot}25$. இவ்வாறாக x இன் ஒவ்வொரு மெய்யெண் மதிப்பிற்கும் $f(x)$ ஓரோர் மெய்யெண் மதிப்பேற்கிறது. இங்கு அடிப்படையான கருத்து யாதெனில், 'ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு அல்லது பொருத்தம்' (idea of correspondence) என்பதாம்.

இவ்வாறாக ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தம் எண்களைப் பொருத்து மட்டுமல்ல; மற்றெந்த பண்பு, வகுப்பு போன்ற எதுவும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு தளத்தில் வரையப்படும் எல்லா சதுரங்களையும் X என்ற கணத்தாலும் அதே தளத்தில் வரையப்படும் எல்லா வட்டங்களையும் Y என்ற கணத்தாலும் குறிப்பிடுவோம். சார்பு $y=f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ என்பதை பின்வருமாறு வரையறுப்போம்:

'ஒவ்வொரு சதுரத்தோடு அதன் சுற்று வட்டத்தைப் பொருத்துக' (Associate each square with its circum circle). இதுவும் ஒரு சார்பாகும்.

எனவே பொருந்தும் சார்பு f என்பது பொருள் உள்ளதாய் (meaningful) ஐயப்பாட்டுக்கு இடமின்றி குறிப்பிட்ட ஓர் x ஒரு ஒரே ஒரு சிறப்பான y பொருத்தப்படக் கூடியதாய் (unambiguous) இருப்பின் மட்டுமே போதுமானது. இந்தக் கருத்துக்களின் அடிப்படையில் 'ஒரு சார்பு' என்பதைப்பற்றி மேலும் நுணுக்கமாகப் பார்ப்போம்.

ஒரு சார்பு எனில் மூன்று பொருள்கள் அங்கு இடம் பெறுகின்றன ;

1. இரண்டு (வெறுங்கணமல்லாத) கணங்கள் X, Y (அவை சமமாயிருக்கலாம், ஆனால் இருக்கவேண்டிய தேவையில்லை)

2. $x \in X$, $y \in Y$ என்ற வகையில் x என்ற ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் பொருத்தமான, ஐயந் திரிபற, நிர்ணயிக்கக் கூடிய ஒரே ஒரு (one and only one) y தான் இருக்கும்.

3. அதைக் காணுவதற்குரிய f என்ற ஒரு விதி இருக்க வேண்டும் அல்லது கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். எனவே நமக்குப் பின்வரும் வரையறை கிட்டும்.

4·21 வரையறை : ஒரு சார்பு என்பது X, Y என்ற இரு கணங்களுக்குள் உள்ள ஒரு 'பொருத்து விதி' என்பபதாம்.

$x \in Y$ மெய்யெண்	$f(x)=y\in Y$	அமைப்பு, மாற்றி, செயலி.
x	x^2	x இன் இருபடி
x	$I[x]$	x இல் உள்ள மீப்பெரு முழு எண் பகுதி காணல்
x	$\frac{x^3+x}{2}$	x இன் முப்படியையும், x ஐயும் கூட்டி அதில் பாதி எடுத்தல்
x (கூட்டு மெய்யெண்)	$\log x$	x இன் மடக்கை காணல்.

f என்ற விதிக்கு சார்பு (function) என்றும், மாற்றி (transformation), என்றும், செயலி (operator) என்றும் பொருள்

விளக்கம் தரலாம். இத்தகைய பெயர்கள் அந்தந்த இடத்தைப் பொருத்து கையாளப்படும். நாம் சார்பு என்பதற்கு ஒரு வரையறை கொடுத்தாலும் அது ஒரு விளக்கமேயன்றி ஒரு வரையறை இல்லை. எனினும் இடத்திற்குத்தக்கவாறு இதன் பொருளை விளக்கிக் கொள்ளுதலே தகும். நாம் அறிந்த சில எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் f என்பதின் பொருள் என்ன என்பதை விளக்கும்.

f என்பது X இலிருந்து Y க்கு உள்ள ஒரு சார்பாயின் Yஇல் உள்ள எல்லா உறுப்புக்களுக்கும், ஒரு $x \in X$ ஐக் கொண்டு பெறும் $f(x)$ ஆனது Y இல் அமையவேண்டும் என்பதில்லை. அதாவது Y இன் கண் சில உறுப்புக்களுக்கு $y = f(x)$ என்ற பொருத்தம் இல்லாமல் இருக்கலாம். எனவே நமக்குப் பின் வரும் வரையறை கிட்டுகின்றது.

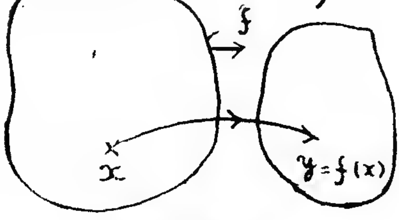
3·22 வரையறை : பிம்பகணம் (Image Set) :

பிம்பகணம் என்பது

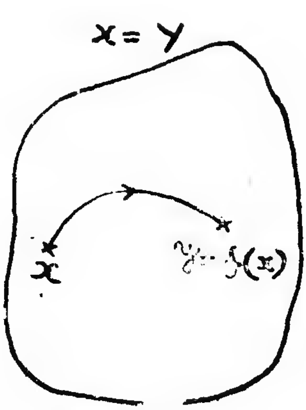
$$Y_1 = \{ y \in Y : f(x) = y, \ x \in X, \ x \text{ ஏதாமொரு உறுப்பு} \}$$

வரையறையிலிருந்து பிம்பகணமானது Y இன் உபகணமாகும் என்பது வெளிப்படை. அதாவது $f(X) \subseteq Y$ [$f(X)$ என்பது X இன் பிம்பங்களாகும்]

அமைப்பை அல்லது சார்பை பின்வரும் படம் கொண்டு விளக்கலாம்.



படம் 4.221



படம் 4·222

படம் 4·221 இல் f என்ற சார்பு X, Y என்ற வெவ்வேறு கணங்களுக்கிடைப்பட்டுக் கிடக்கின்றது. ஆனால் படம் 4·222

இல் f என்ற சார்பு $X = Y$ என்ற ஒரே கணத்திற்கு வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது.

3·23 வரையறை : f என்ற சார்பு X இலிருந்து Yக்கு வரையறை செய்யப்பட்டால் X என்பது அரங்கம் (Domain) என்றும், Y என்பது பிம்பகணம் அல்லது வீச்சு (Range) என்றும் பெயர் பெறும். வீச்சை R என்றும் அரங்கத்தை D என்றும் குறியீடு செய்வோம்.

மரபு : சார்பு என எடுத்துக்கொண்டால் எப்பொழுதும் சார்கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒரு பிம்பம் இருத்தல் வேண்டும் என்று கொள்வது வழக்கத்தில் இருக்கின்றது.

பயிற்சி **1** : $X =$ முழு எண் கணம் என்றும் $Y =$ மெய்யெண் கணம் என்றும் கொண்டு f என்ற பொருத்தம் 'மடக்கையெடுத்தல்' என்று கொண்டால் f என்பது ஒரு சார்பாகுமா ? f ஐ சார்பாக்க X இல் என்ன மாறுதல் செய்யப்பட வேண்டும் ? [விடை X கூட்டு முழு எண் கணமாக இருத்தல் வேண்டும்.]

எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $X = \{a, b, c\}$ எனவும் $Y = \{2, 4, 8, 6, 10\}$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டு f என்ற அமைப்பைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்வோம்.

$f(a) = 2, \quad f(b) = 6, \quad f(c) = 10$

எனவே $f(X) = \{2, 6, 10\}$ ஈண்டு $f(X) \subset Y$ என்பது வெளிப்படை.

2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ எனவும் $f(x) = x^2$ என்ற அமைப்பையும் எடுத்துக் கொள்வோம். ஈண்டு பிம்பகணம் $\{1, 4, 9, 16, 25,\}$ என்பதாம். பிம்ப கணத்தில் உள்ள ஐந்து உறுப்புக்களில் ஒரு உறுப்பு குறைந்தாலும் $f(x) = x^2$ என்ற அமைப்பு முற்றுப் பெருது.

4·24 வரையறை : மாறிலிச் சார்பு [Constant function] $x \in X$ என்ற எல்லா X உறுப்புக்களுக்கும் $f(x) = a$ என்ற ஒரே பிம்பம் இருக்குமாயின் f என்பது ஒரு மாறிலிச் சார்பு அல்லது மாறிலி அமைப்பு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$X = \{a, b, c, d, \} \; ; \; Y = \{e\}$$ என்றும்

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = e$$ என்றும்

எடுத்துக்கொண்டால் f என்பது ஒரு மாறிலிச் சார்பாகும்.

நாம் வரையறை செய்த 'அமைப்பு' என்பது வரிசைப் பட்ட இரட்டைகளின் பகுதிக் கணமாகவும் ஈண்டு காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக

$A = \{ a, b, c, d, \}$ என்றும் $B = \{ e, f\}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். ஈண்டு

$$A \times B = \{(a, e), (a, f), (b, e), (b, f), (c, e), (c, f), (d, e), (d, f)\}$$

என்ற கணமாகும். ஆனால் $A \times B$ இன் எல்லா பகுதிக் கணங் களும் அமைப்பாக முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக

$X = \{ (a, e), (a, f), (b, e), (c, e) (d, e) \}$ என்ற பகுதிக்கணம் ஒரு அமைப்பாக முடியாது ஏனெனில் 'a' என்ற உறுப்பிற்கு e, f என்ற இரு உறுப்புக்களைப் பொருத்தியிருக்கின்றோம். ஆனால்

$Y = \{ (a, e), (b, e), (c, f), (d, f)\}$

என்ற பகுதிக்கணம் ஒரு அமைப்பாகும். அதாவது அரங்கத் திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு வீச்சு உறுப்புத் தான் நாம் ஈடு செய்யவேண்டும். இவ்வாறு ஈடு படுத்தப் பட்ட வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளின் கணமே ஒரு அமைப் பாகும். இதை மனதிற்கொண்டு அமைப்பு என்பதைப் பின் வருமாறு வரையறை செய்வோம்.

3·25 வரையறை : அரங்கத்தின்கண் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் வீச்சின்கண் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டும் ஈடு படுத்தப்பட்ட 'வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளின்' கணத்திற்கு ஒரு அமைப்பு எனப் பெயர்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $X = \{ o, 1 \}$, $Y = \{ 1 \}$ என்று கொண்டு

$A = \{ (0, 1), (1, 1)\}$ என்று வரையறை செய்தால் A ஒரு அமைப்பாகும்.

இதையே $f : \{ (0, 1), (1, 1) \}$ என்று கொண்டால்

$f (0) = 1 ; f (1) = 1.$ என எழுதுவோம்.

2. $X = \{(1)\}$; $Y = \{0, 1\}$ எனக்கொண்டு

$A = \{(1, 0) ; (1, 1)\}$ என்று கொண்டால் A ஒரு சரியாக வரையறுக்கப்பட்ட 'அமைப்பு' அல்ல.

3. அமைப்பு கணம் $\{(x, f(x))\}$

$= \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

எனில் அரங்கம் $A = \{1, 2, 3, 4\}$

வீச்சு $Y = \{3, 4, 5\}$

4. பின்வரும் 'அமைப்பு' ஒரு சரியான அமைப்பு அல்ல.

அமைப்புகணம் $= \{(x, f(x))\}$

$= \{(2, 3), (2, 5), (3, 6), (3, 7)\}$

ஈண்டு அரங்கம் $= \{2, 3\}$

வீச்சு $= \{3, 5, 6, 7\}$

இது சரியான அமைப்பல்ல· ஏனெனில் அரங்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடன் இரண்டு வீச்சு உறுப்புக்கள் ஈடு செய்யப்பட்டுள்ளன.

5. $\{(x, y) : x$ ஒரு முழு எண், $y = x^2\}$

இது ஒரு சரியான அமைப்பு. இதில் அரங்கம் முழு எண்ணாக வும், வீச்சு கூட்டு முழு எண்ணாகவும் உள்ளது.

6. $\{(x, y) : x$ ஒரு கூட்டு முழு எண், $y = x^2 + x\}$ இவ்வமைப்பில் அரங்கம் கூட்டு முழு எண் வீச்சு கூட்டு முழு எண்களின் ஒரு பகுதிக் கணம்.

நாம் படித்துள்ள அடுக்குகள், மடக்கைகள் எல்லாம் ஒரு அமைப்பைச் சேர்ந்தவைகளே· இவைகளைப்பற்றிப் பின்னர் தெரிந்துகொள்வோம்.

பயிற்சி 4

I பின்வரும் அமைப்புக் கணங்கள் [mapping Set] சரியான அமைப்பா அல்லவா எனக் கூறுக. அவைகளின் அரங்கம், வீச்சு எவ்வாறு உள்ளது என்றும் கூறுக.

1. $\{(0, 1), (1, 1), (2, 4), (3, 4)\}$
2. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$
3. $\{(1, 0), (0, 1), (2, 0), (0, 2)\}$

4. $\{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$

5. $\{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$

II பின்வரும் அமைப்பு கணங்களுக்குரிய அரங்கம், வீச்சு இவைகளைக் காண்க.

1. $\{(a, 1)\}$

2. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

3. $f = \{(x, y) :$ x முழு எண், $y = x^3\}$

4. $f = \{(x, y) :$ x கூட்டு முழு எண் $y = \frac{1}{x}$

III கீழே சில 'அமைப்புக் கணங்கள்' கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அவைகளுக்குரிய அரங்கம் X, வீச்சு Y என்னவென்று தனித்தனியாகக் குறிப்பிடுக.

1. $f \cdot \{(x, y) :$ x மெய்யெண், $0 \leq x \leq 1, y = x^2\}$

2. $f : \{(x, y) :$ x முக்கோணம், y அதன் பரப்பு$\}$

V. வரை படங்கள்

(Graphs)

5·1 மெய்யெண்களை ஒரு நேர்க்கோட்டுப் புள்ளிகளாக குறியீடு செய்யும் முறை :

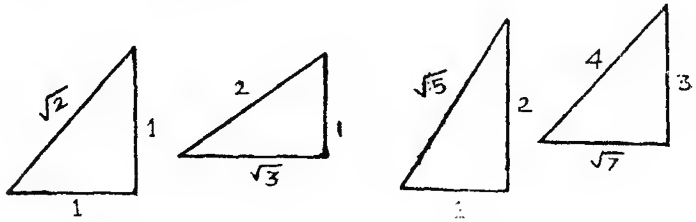
சாதாரணமாக $y=f(x)$ என்ற சார்பின் படம் உங்களுக்கு வரைபடத் தாளில் வரையத் தெரியும். OX என்ற நேர்க் கோட்டை எடுத்துக் கொண்டு O என்ற புள்ளிக்கு வலது கைப் புறமும் இடது கைப்புறமும் அதை எவ்வளவு தூரம் வேண்டுமானாலும் இரு பக்கங்களிலும் நீட்டலாம்.

படம் 5·11

மேற்கண்ட படத்தில் (படம் 5·11) Oஐ ஆதியாகக் கொண்டு ஒரு வசதியான அலகு கொண்டு, அக் கோட்டின் மேல் 1, 2, 3,......, என்ற புள்ளிகளையும், −1, −2, −3, ..., என்ற புள்ளிகளையும் உங்களுக்கு இடங்குறிக்கத் தெரியும். எனவே கூட்டு, குறை முழு எண் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஓரோர் புள்ளி இருக்கும். அந்தந்த புள்ளிகள் அந்தந்த கூட்டு குறை முழு எண்களைக் குறிக்கும். அவ்வாறே $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, ..., போன்ற கூட்டு எண்களையும் $-2\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$,...... போன்ற குறை எண்களையும் உங்களுக்கு இடங்குறிக்கத் தெரியும். கூட்டு, குறை முழு எண்கள், கூட்டு, குறை பின்னங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் சிறப்பான, தனியான ஒரே ஒரு புள்ளி பொருத்தமாக இருக்கும் என்பது உங்களுக்குப் புலப்படும். இவ்வித எண்கள் யாவும் அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண் என்பதும் நீங்கள் அறிவீர்கள்.

ஏனெனில் அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண் என்பது p/q என்ற அமைப்பில் இருக்கும்; p என்ற மேலெண் எந்த கூட்டு, குறை முழு எண்ணுகவும் இருக்கலாம்; q என்பது 1 என்ற முழு எண் உள்பட எந்த கூட்டு முழு எண்ணுகவும் இருக்கலாம். எனவே p/q என்ற அமைப்பில் கூட்டு, குறை முழு எண், கூட்டு, குறை பின்னம் என்ற எல்லா அளவுக்கிணங்கிய மெய் யெண்களும் அடங்கும். இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் பொருத்த மான அல்லது ஒத்த புள்ளி முன் குறிக்கப்பட்ட நேர்க்கோட் டில் உள்ளது. ஒரு எண்ணுக்கு ஒரே புள்ளி, ஒரு புள்ளிக்கு ஒரே எண் என ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய ஓர் அளவுக் கிணங்கிய கணக்கிலடங்காத மெய்யெண் இனமும் அவ்வினத் திற்கு ஒத்த ஒரு நேர்க்கோட்டிலமைந்த கணக்கிலடங்காப் புள்ளிகளும் உள்ளன.

ஆனுலும் p/q என்ற அமைப்பில்லாத ஒரு வகை யெண் ணினமும் உண்டு; எடுத்துக்காட்டாக $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$,...., போன்றவை. இவை p/q என்ற அமைப்பில் வாராயெனினும் அவைகளுக்குரிய அளவுகளைப் பின்வரும் செங்கோண முக் கோணங்களில் காண்க:



படம் 5·12

இந்த அளவுகள் முன்கூறிய நேர்க்கோட்டின் மேல் இடங் குறித்தால், அந் நேர்க்கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகளில் அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண்களுக்கும் பொருத்தமாயமைவ தாயல்லாமல், அளவுக்கிணங்காத மெய்யெண்களுக்கும் (irrational numbers), ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தமாயமை கின்றன வென்பதைக் காண்க. எனவே மேற்கூறிய நேர்க் கோட்டின் வாயிலாக அளவுக்கிணங்கிய, அளவுக்கிணங்காத மெய்யெண்களுக்கும் அக்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளுக்கும் 'ஒரு மெய்யெண்ணுக்கு ஒரு புள்ளி, ஒரு புள்ளிக்கு ஒரே மெய் யெண்' என்ற ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தமிருப்பதைக் காண்க. இவ்வாறுக எண்ணமைப்பில் எண்களின் தொடரகத் திற்கும் (Arithmetical continuum) நேர்க் கோட்டுப் புள்ளிகளின்

தொடரகத்திற்கும் (Linear continuum) உள்ள நெருங்கிய தொடர்பு கணித இயலில் பெருஞ்சிறப்பு (சிக்கலும் கூட) வாய்ந்தது.

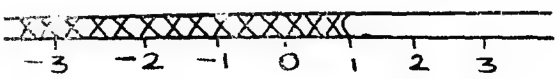
இந்த முக்கியமான அடிப்படையில் பின்னர் கூறப்பட விருப்பது தெளிவாகும்.

5·2 கணவியலோடு சமனின்மையின் தொடர்பு :

இப்பகுதியின் நோக்கம் கணங்களுக்கும் சமனின்மைக்கும் உள்ள தொடர்புகளைக் கவனிப்பதாகும். கணங்களை விளக்கிச் சமனின்மைக் கருத்துகளைப் பயன் படுத்தலாம். ஒரு சமனின்மையை உண்மையாக்கும் எண் கணத்தையோ அல்லது சில குறிப்பிட்ட சமனின்மைகளை ஒருங்கே உண்மையாக்கும் எண்கணங்களையோ ஆராய்வதற்கு கணவியலில் விளக்கம் பயன்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக '$x < 1$ என்ற உண்மையின் தீர்வுக் கணம் $\{x : x<1\}$ எனக் கூறப் படுகிறது (solution set of the inequality $x<1$).

எனவே சில எடுத்துக்காட்டுக்கள் கொண்டு சமனின்மை கருத்துக்களுக்கொப்பிய தீர்வுக் கணங்களைப் பார்ப்போம்.

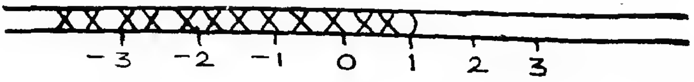
எடுத்துக்காட்டு 1 : ஒரு நேர்க்கோட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆய ஆதியும் வசதியான அலகு ஒன்றும் ஏற்றுக் கொண்டு, மெய்யெண்களுக்கும் அக்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளுக்கும் 'ஒன்றுக்கொன்று ஒரே ஒன்று' எனவுள்ள பொருத்தத்தை நாம் 5·1 இல் விளக்கினோம். $x<1$ என்ற சமனின்மைக்குரிய தீர்வுக்கணம் என்னவெனில் $\{x : x<1\}$ என்ற கணத்தை வரைபடம் கொண்டு விளக்கம் செய்வதுதான்.



படம் 5·21

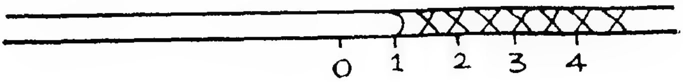
படம் 5·21 இல் கோடிட்ட பகுதி $x<1$ என்பதற்கு ஒப்பிய தீர்வுக் கணமாகும். $x<1$ என்பதையும் $x\leq 1$ என்பதையும் சற்று வேறுபட்ட முறைகளால் வரைபடத்தில் காட்டுவது மரபு.

படம் 5·22 $x \le 1$ க்கு ஒப்பிய தீர்வுக் கணத்தைக் காட்டும்.

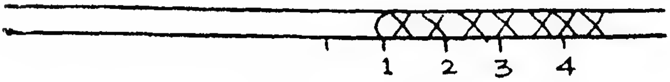


படம் 5·22

$x<1$ க்கு (என்ற குறியும், $x\le$ க்கு) என்ற குறியும் '1' என்ற புள்ளியில் இவ்வேறுபாட்டை எடுத்துக்காட்டும் குறிகளாகும்.



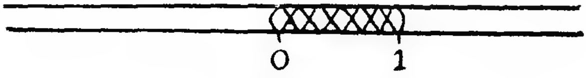
படம் 5·23



படம் 5·24

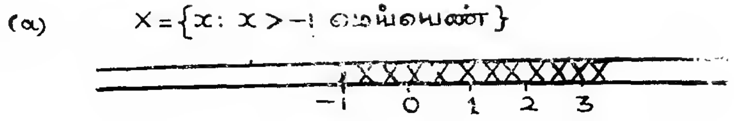
அவ்வாறே படம் 5·23 இல் $x>1$ என்பதும், படம் 5·24 இல் $x\ge 1$ என்பதும் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$x=\{x : 0\le x\le 1\}$ என்ற கணத்தில் பூச்சியத்திற்கும் ஒன்றிற்கும் உட்பட்ட எல்லா மெய்யெண்களும் உள்ளன என்பதைக் காண்க. இதன் படம் 5·25.

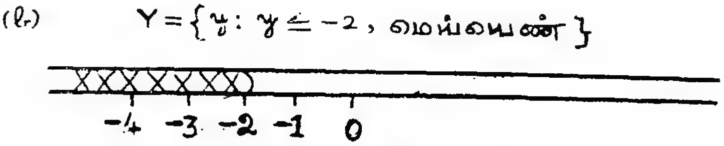


படம் 5 25

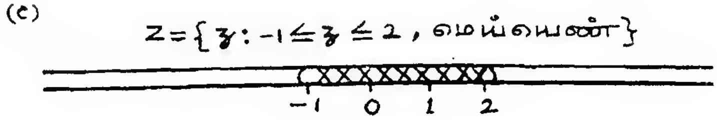
பின்வரும் படங்கள் சில கணங்களைக் குறிக்கின்றன. வரைபடத்தை மொத்தமான கோடாகக் கொண்டு அதில் கோடிட்ட பகுதி நமக்கு வேண்டிய கணத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.



படம் 5·26



படம் 5·27



படம் 5·28

மேற்கூறிய (*a*), (*b*), (*c*) என்ற எடுத்துக்காட்டுகளில்

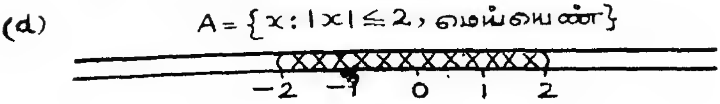
(i) $X \cup Y = ?$

(ii) $X \cap Y = ?$

(iii) $X \cup Z = ?$

(iv) $X \cap Z = ?$

(v) $X \cap Y \cap Z = \emptyset$ என்பது சரியா தவறு?

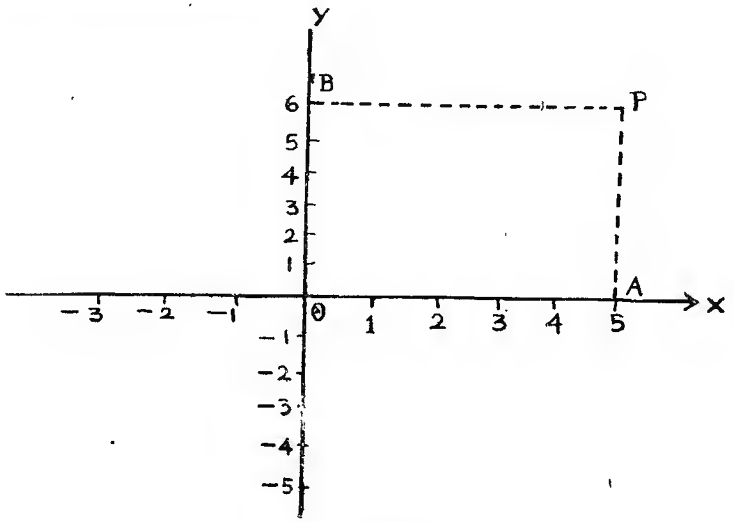


படம் 5·29

5·3 தளவரைப்படம் :

முன்பகுதியில் மெய்யெண்களையும் ஒரு நேர்க்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளையும் தொடர்பு படுத்திக் கணங்களைப் பற்றிய சில விளக்கங்களையும் சமனின்மைகளையும் கண்டோம். இதைப் போலவே ஒரு தளத்தின்கண் அமைந்த புள்ளிகளை எங்ஙனம்

கணவாயிலாகக் கூற இயலும் என்பதை ஈண்டு நோக்கு வோம்; மேலும் கணவாயிலாகக் கூறுங்கால் அப்புள்ளி எவ் வாறு மெய்யெண்களோடு தொடர்பு படுத்தப்படுகின்றது என்பதை அறியலாம்.



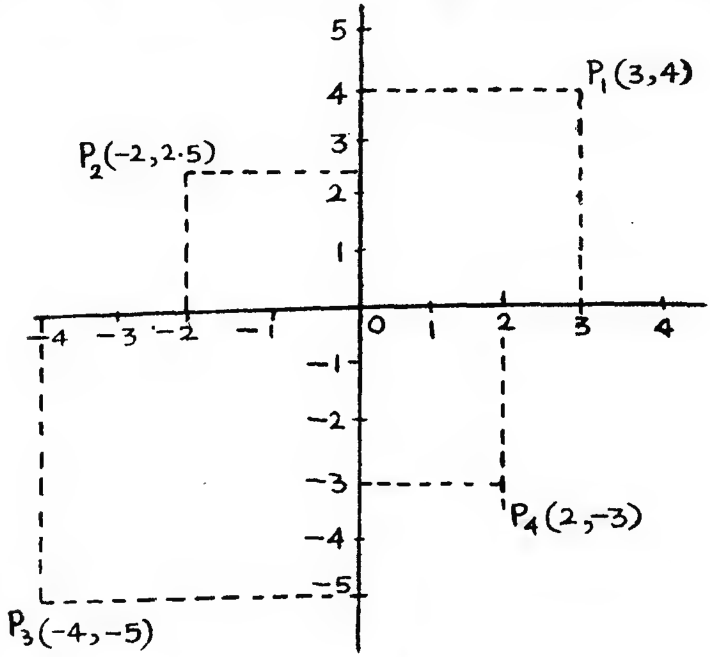
படம் 5·31

ஒரு தளத்தில் P என்ற புள்ளி இருக்கின்றது. அப் புள்ளியை ஆயத் தொலை வடிவ தளத்தில் மெய்யெண்களோடு தொடர்பு படுத்துவதாகும்.

OX என்ற நேர்க்கோடும், அதற்கு செங்குத்தாக O வழியே OY என்ற நேர்க்கோடும் எடுத்துக் கொள்க. இவை ஆயத் தொலை வடிவ கணிதத்தில் ஆய அச்சுக்கள் எனக் கூறப்படும். OX, OY என்ற கோடுகளை இரு பக்கமும் நீட்டிக் கொள்க. எல்லா மெய்யெண்களையும் OY இன் மீதும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு படுத்திக் கொள்க. O என்ற புள்ளி OX இன் மேல் பூச்சியத்தையும், OY இன் மேல் பூச்சியத்தையும் குறிக் கின்றன. P வழியாக OX க்கும், OY க்கும் குத்துக் கோடுகள் வரைந்து கொள்க. அக் கோடுகள் OX ஐயும் OY ஐயும் முறையே A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். A என்ற புள்ளிக்குரிய மெய்யெண் 5; B என்ற புள்ளிக்குரிய மெய் யெண் 6; P என்ற புள்ளியை (5, 6) என ஓர் வரிசைப்பட்ட இரட்டையால் (ordered pair) குறிக்க. முதல் எண்ணை பொது

வாக x என்றும் இரண்டாவது எண்ணை பொதுவாக y என்றும் குறிப்பிடுவது மரபு. இவ்வாருக அத்தளத்திலுள்ள எல்லா புள்ளிகளையும் (x, y) என வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளால் குறிக்கலாம் எனத் தெரிகிறது.

படம் 5·32 இல் P_1, P_2, P_3, P_4 என்ற புள்ளிகளுக்குரிய வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளை உரிய இடங்களில் மேற்கூறிய



படம் 5·32

படத்தில் காண்க. இவ்வாருக எந்த ஒரு புள்ளிக்கும் ஒரு வரிசைப்பட்ட இரட்டை பெறலாம் எனக் காண்க.

$X \times Y = \{(x, y) : x =$ மெய்யெண், $y =$ மெய்யெண்$\}$ என்ற கணம் பெறப்படுவதைக் காண்க. இக்கணத்தை $R \times R$ என்ற குறிப்பிடுவது மரபு. R என்பது ஈண்டு மெய்யேண் கணமாம்.

குறிப்பு: ஒரு வரிசைப்பட்ட இரட்டைக்கு ஒரு, ஒரே ஒரு புள்ளியும், ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு, ஒரே ஒரு வரிசைப்பட்ட இரட்டையும் 'ஒன்றுக்கொன்று ஒரே ஒன்று என்று பொருத்த முடையன வென்பதைக் காண்க.

கீழே சில சமன்பாடுகளும் அவைகளை உண்மையாக்கும் வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளையும் கொண்ட கணங்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

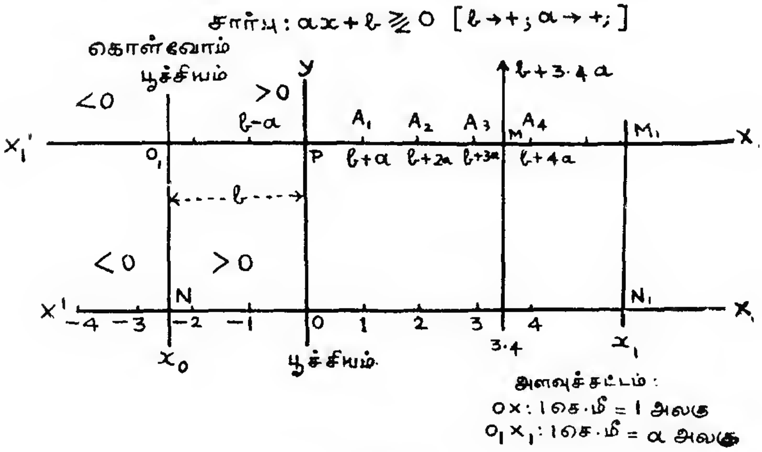
a) $y=3$: $\{ (x,y) : x=x, y=3\}$
b) $x=-5$: $\{ (x,y) : x=+5, y=y\}$
c) $y=-3x$: $\{ (x,+3x)$: x மெய்யெண் $\}$
d) $y=|x|$: $\{ (x,1x1)$: x மெய்யெண் $\}$
e) $y=3x-2$: $\{ (x,3x-2)$: x மெய்யெண் $\}$
f) $y=x^2+1$: $\{ (x,x^2+1)$: $x-$மெய்யெண் $\}$

இவ்வாருக $y=f(x)$ என்ற சமன்பாட்டையும் $\{ (x,+(x)$: x மெய்யெண் $\}$ என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளைக்கொண்ட கணமாகக் கூறலாம்.

5·4 $ax+b \gtrless 0$க்குப் பொருத்தமான தீர்வுக்கணங்கள் :

இப்போது $ax+b \lesseqgtr 0$ என்ற சமனின்மையைப் பற்றிப் பார்ப்போம். அப்படிச் சோதிக்கும் பொழுது $ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் ஒரு x மதிப்பு அல்லது தீர்வுக் கணமும் பெறப்படும்.

$ax+b$ என்ற கணியத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரு



படம் 5.41

குறிப்பிட்ட x மதிப்புக்குப் பொருத்தமான $ax+b$ காண ஒரு அளவுப் படம் வரையலாம் [படம் 5·41 காண்க].

1. முதலில் b கூட்டெண் a கூட்டெண் எனக் கொள்வோம்.

$X'OX$ என ஒரு நேர்க்கோடும் OY என்ற குத்துக்கோடும் $X'OX$ இன் மேல் வசதியான அலகு கொண்டு 1, 2, 3,..., —1, —2, —3,... குறித்துக்கொள்க. இங்கு 1 செ.மீ. = 1 அலகு எனக் கொள்வோம். இந்தப் பகுதி முழுவதுமே அந்த அளவுச் சட்டத்தை வைத்துக் கொள்வோம். Oக்கு மேல் OY இல் P என்ற ஏதாமொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு X'_1PX_1 என $X'OX$க்கு ஒரு இணைகோடு வரைந்து கொள்க. OX இல் ஒரு அலகு எனக் கொள்ளப்படும் நீளம் $X_1'PX_1$ இல் a என்ற அளவைக் குறிக்கட்டும், அதாவது OX' அச்சில் 1 செ.மீ. = a அலகுகள். எனவே $PA'=a$, $PA_2=2a$,... என்ற அளவுகள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன. இந்த அளவுகோல்படி Pக்கு இடப்பக்கம் b என்ற அளவு எடுத்து $PO_1=b$ என O_1 ஐ இடங்குறிக்க ; அதாவது $PO_1=\frac{b}{a}$ செ.மீ.

(A) $X_1'O_1X_1$ க்கு ஆய ஆதி O_1→பூச்சியம் குறிக்கும்

(B) $X'OX$ க்கு ஆய ஆதி O→ பூச்சியம் குறிக்கும்

எனக் கொள்ளப்படுகின்றன. (A) என்ற கோட்டை மேற்கோடு என்றும் (B) என்ற கோட்டைக் கீழ்க்கோடு என்றும் இனி குறிப்பிடுவோம். x இன் எந்த மதிப்பிற்குரிய $ax+b$ வேண்டுமானாலும் பின்வரும் முறை கையாளப்படுவது பொருத்தமாகிறது என்பதைக் காணலாம். $X'OX$ இல் x ஐ இடங்குறித்து அப்புள்ளி வழியாக ஒரு குத்துக்கோடு வரைந்தால் அக்குத்துக்கோடு அதன் மேலிருக்கும் இணைகோட்டை வெட்டுமிடம் $ax+b$ இன் மதிப்பைக் கொடுக்கும். எடுத்துக்காட்டாக $x=3{\cdot}4$ வழியாக வரையப்படும் குத்துக்கோடு மேற்கோட்டை M என்ற இடத்தில் வெட்டினால் $O_1M=b+3{\cdot}4a$. மறுதலையாக $ax+b$ எந்த மதிப்பிருப்பினும் மேற்கோட்டில் $ax+b$ இன் மதிப்பை இடங்குறித்து, அப்புள்ளி வழியாக வரையப்படும் குத்துக்கோடு கீழ்கோட்டை வெட்டுமிடம் அந்த $ax+b$ இன் மதிப்புக்குரிய x மதிப்பாகும். எடுத்துக்காட்டாக மேற்கோட்டில் M_1 குறிக்கும் மதிப்புக்குப் பொருத்தமான x இன் மதிப்பு கீழ் கோட்டில் N_1 குறிக்கும் மதிப்பான x_1 ஆகும்.

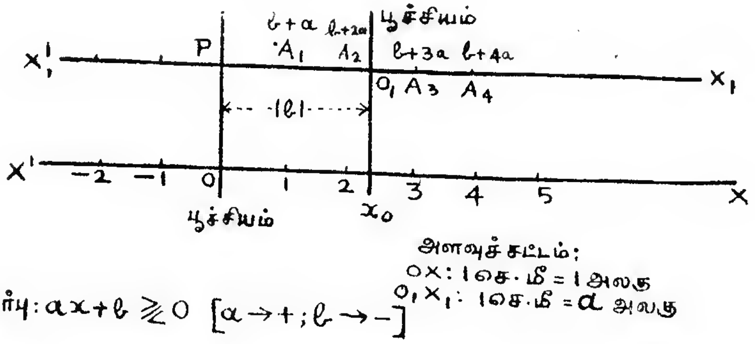
O_1 வழியாக வரையப்படும் குத்துக்கோடு கீழ்க்கோட்டை N இல் வெட்டினால் ON என்ற அளவில் உள்ள x மதிப்புக்கு

$ax+b=0$ என்பது உண்மையாகும். [O_1 என்பது பூச்சியத்தை மேற்கோட்டில் இடங்குறிக்கிறது, அதற்குறிய x இன் மதிப்பு x_0]. $ON=x_0$ (குறையெண்ணாக இருக்கும்) ஆயின் $\{x_0\}$ என்ற ஒருறுப்புக்கணம் $ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும். X க்கு வலது பக்கமுள்ள x புள்ளிக்கு $ax+b>0$ ஆகவும்' Xக்கு இடது பக்கமுள்ள x புள்ளிக்கு $ax+0<0$ ஆகவும் இருக்கும். எனவே $ax+b>0$ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம்,

$\{x : x>x_0$, மெய்யெண்$\}$ எனவும் $ax+b<0$ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம்

$\{x : x<x0,$ $\}$மெய்யெண்
எனவும் பெறப்படும்.

2. b குறையெண்ணாயிருந்து $[b=-b^1$ (b^1 கூட்டெண்)] a கூட்டெண் எனக்கொண்டால் படம் சற்று மாறுவதைப் பின் வரும் படத்தில் காண்க (படம் 5·42.)



படம் 5·42

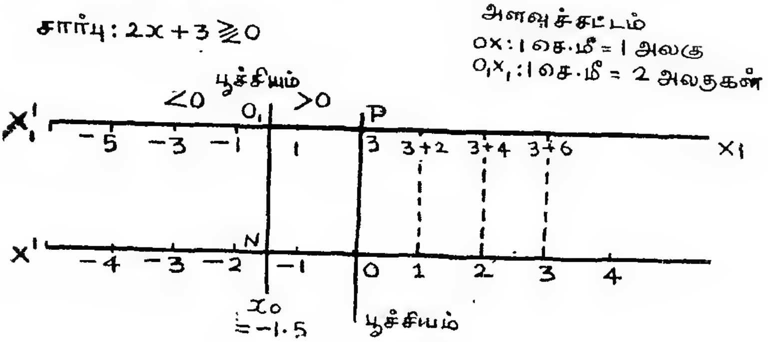
Nக்குரிய x_0 க்கு $ax+b=0$ என்பது மெய்யாகும். இங்கு $OX=x_0$ (கூட்டெண்ணாயிருக்கும்) ஆனால் $\{x_0\}$ என்ற ஒருறுப்புக் கணம் $ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம். $ax+b>0$—ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம்.

$\{x : x>xo$, மெய்யெண்$\}$
எனவும் $ax+b<0$ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம்,

$\{x : x<xo$, மெய்யெண்$\}$
எனவும் பெறப்படும்,

எடுத்துக்காட்டு :

1. $2x+3 \gtreqless 0$ ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணங்களை வரைபடம் வரைந்து காட்டுக.



படம் 5.43

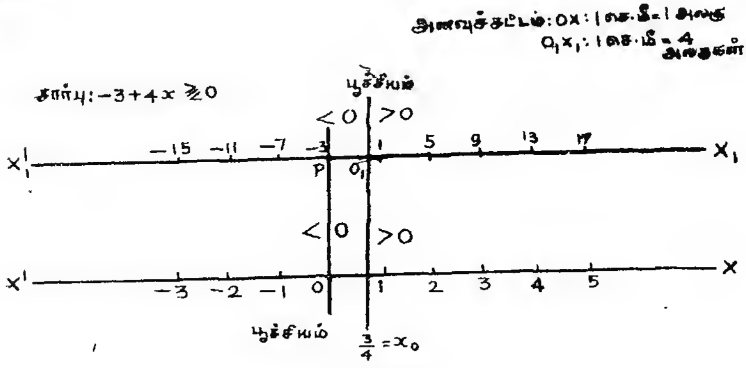
$\{-1\frac{1}{2}\}$ என்பது $2x+3=0$ ஐ உண்மையாக்கும் ஒருறுப்புத் தீர்வுக்கணம்.

$\{x : x > -1\frac{1}{2}$, மெய்யெண்$\}$

என்பது $2x + 3 > 0$ ஐயும்

$\{x : x < -1\frac{1}{2}$, மெய்யெண்$\}$

என்பது $2x + 3 < 0$ ஐயும் உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணங்களாகும்.



படம் 5 44

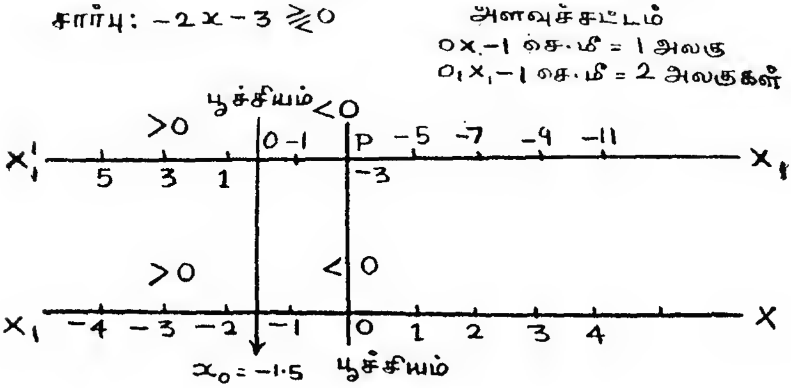
2) $-3+4x \gtreqless 0$ ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணங்களை வரைபடம் வரைந்து காட்டுக.

$\{\frac{3}{4}\}$ என்பது $-3+4x=0$ஐ உண்மையாக்கும் ஒருறுப்புத் தீர்வுக்கணம்.

$\{x : x > \frac{3}{4}$, மெய்யெண் $\}$
என்பது $-3+4x>0$ ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணமாகும்.

$\{x : x < \frac{3}{4}$, மெய்யெண்$\}$
என்பது $-3+4x<0$ ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக் கணமாகும்.

3. $-2x-3 \gtreqless 0$ ஐ உண்மையாக்கும் உறுப்புக்களைக் கொண்ட கணங்களை வரைபடம் வரைந்து காட்டுக.



படம் 5:45

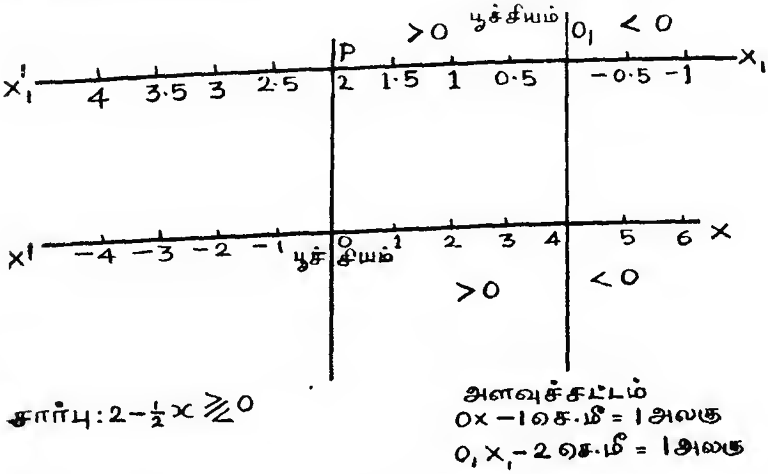
இங்கு மேற்கோட்டில் நமது மரபுக்கு நேரெதிர் மாருக 0_1க்கு இடது புறம் கூட்டெண்களும் வலதுபுறம் குறையெண் களும், அளவுச்சட்டம் 1 செ.மீ = 2 அலகுகள் என்ற வகையில் இடங்குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இதுவும் நாம் ஏற்றுக்கொள் ளக் கூடிய ஒரு மரபுதான்; ஆனால் இந்த ஆய்வு முடியும் வரை யில் நாம் வழக்கமாகக் கொள்ளும் முறையே கீழ்க்கோட்டிற் குப் பொருத்தமென்றும், அதற்கு எதிர்மாருன மரபு மேற் கோட்டிற்குப் பொருத்தமென்றும் கவனம் வைக்கவேண்டும்.

$\{-\frac{3}{2}\}$ என்பது $-2x-3=0$ ஐ உண்மையாக்கும் ஒருறுப்புத் தீர்வுக்கணம்.

$\{x : x > -\frac{3}{2}\}$ என்பது $-2x-3<0$ ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம்.

$\{x : x < -\frac{3}{2}\}$ என்பது $-2x-3>0$ ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம்.

4) $2-\frac{1}{2}x \gtreqless 0$ ஐ உண்மையாக்கும் கணங்களைவரைபடம் வரைந்து காட்டுக.



படம் 5·46

இங்கு நமது மரபிற்கு நேர் எதிர் மாருக, மேற்கோட்டில் O_1க்கு இடதுபுறம் கூட்டு எண்களும், வலது புறம் குறையெண்களும் 2 செ.மீ. = 1 அலகு என்ற வகையில் இடங்குறிக்கப்படுகின்றன.

{4} என்பது $2-\frac{1}{2}x=0$ ஐ உண்மையாக்கும் ஒருறுப்புக் கணம்

$\{x : x>4$, மெய்யெண்$\}$

என்பது $2-\frac{1}{2}x<0$ ஐ மெய்யாக்கும் தீர்வுக்கணம்.

$\{x : x<4$, மெய்யெண்$\}$

என்பது $2-\frac{1}{2}x<0$ ஐ மெய்யாக்கும் தீர்வுக் கணம்.

பயிற்சி 5.1

I. பின்வருவன $ax+b$ என்ற அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. $ax+b \gtreqless 0$ என்றவற்றினை உண்மையாக்கும் கணங்களை வரைபடம் வரைந்து காட்டுக. அளவுச் சட்டங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக.

1. $x+4$
2. $x-\frac{1}{2}$
3. $6-4x$
4. $6+3x$
5. $-x-3$
6. $\frac{1}{3}x-8$
7. $\frac{1}{2}x+1$
8. $2x-m$ (m மாறிலி)
9. $mx+c$ (m, c மாறிலிகள்)

5·5 $ax+by+c \gtreqless 0$ ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக் கணங்கள் :

$ax+by+c \gtreqless 0$ ஐ உண்மையாக்கும் தீர்வுக் கணங்களை சில எடுத்துக்காட்டுகள் வழி ஈண்டு விளக்குவோம்.

முதலில் $3x-2y+6=0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம், (1, 1), (2, 2), (3, 1)...... என்ற வரிசைப் பட்ட இரட்டைகள் இச் சமன்பாட்டை உண்மையாக்காது. ஆனால் (0, 3) (2, 6), (4, 9), (−2, 0), (−4, −3) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் இச் சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் என்று ஈடு செய்தே நாம் நேரடியாகக் காணலாம்.

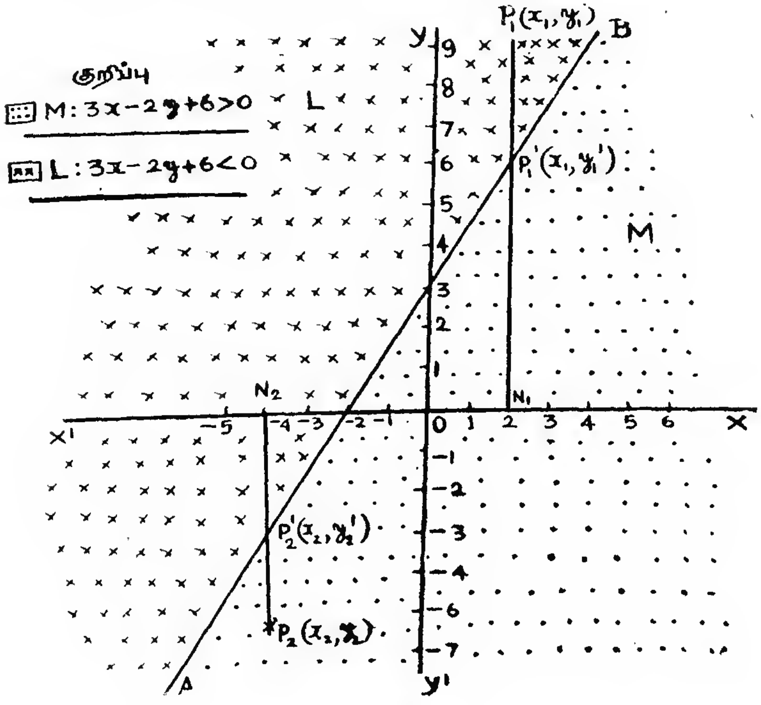
எனவே ஒரு குறிப்பிட்ட தளத்தில் $X'OX$, $Y'OY$ என்று O இல் வெட்டும் இரு செங்குத்துக் கோடுகளை எடுத்துக் கொள்க. அத்தளத்தில், (x, y) என வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளால் பெறப்படும் கணம் இரண்டு உபகணங்களாகப் பிரிவதைக் காண்க.

(a) இச் சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள்

(b) உண்மையாக்காத வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள்

முதலில் கூறப்பட்ட வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளின் கணம் இச் சமன்பாட்டின் வரை படம் எனப்படும். இச்சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத் தாளில் குறித்தால் அவை ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைவதையும் அந் நேர்க்கோடு (−2, 0), (0, 3) என்ற இரு புள்ளிகள் வழியாகச்

செல்வதையும் பார்க்கலாம்; முதற்புள்ளி $(-2, 0)$ என்பது $X'OX$ இன் மேலும், இரண்டாவது புள்ளி $(0, 3)$ என்பது $Y'OY$ இன் மேலும் உள்ளன என்பதைக் காணலாம்.



படம் 5·51

படம் 5·51 இல் AB என்பது $3x-2y+6=0$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம். இச்சமன்பாட்டை

$$2y=3x+6$$

அல்லது $y=\frac{3}{2}x+3$.

எனவும் எழுதலாம்.

AB என்ற நேர்க்கோடு அத்தளத்தை L, M என இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றது. அந்நேர்க்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் தவிர L, M என்ற தளப் பகுதிகளில் உள்ள எப் புள்ளியும் (அதாவது உரிய வரிசைப்பட்ட இரட்டையும்) $3x-2y+6=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணமாகாது.

எனவே முன் இப்பத்தியில் (a), (b) எனக் குறிப்பிட்ட வரிசைப் பட்ட இரட்டைகளை இரு உபகணங்களாகப் பிரிகின்றன :

(a) $\{(x, y): \ x=$ மெய்யெண் ; $y=\frac{3}{2}x+3\}$

(b) $\{(x, y): \ x=$ மெய்யெண் ; $y\neq\frac{3}{2}x+3\}$

L என்ற பகுதியில் $P_1\ (x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி (வரிசைப்பட்ட இரட்டை) எடுத்துக்கொள்க. P_1 இலிருந்து OXக்கு வரையப் படும் குத்துக்கோடு AB ஐ $P_1'\ (x_1, y_1')$ என்ற புள்ளியிலும் $X'OX$ ஐ $N_1\ (x_1, O)$ என்ற புள்ளியிலும் வெட்டட்டும். $P_1'\ (x_1, y_1')$ என்பது AB இன் மேலேயே இருப்பதால்

$$y_1'=\tfrac{3}{2}\,x_1+3$$

ஆகின்றது. மேலும் படத்திலிருந்து $y_1>y_1'$ எனவே

$$y_1>\tfrac{3}{2}\,x_1+3$$

அதாவது $2y_1>3x_1+6$

$$\therefore\ 2y_1-3x_1-6>0$$

$$\therefore\ 3x_1-2y_1+0<0$$

எனப் பெருகின்றோம். இது L என்ற பகுதியில் உள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும் பொருந்துமாதலின், L என்ற பகுதியிலுள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் யாவற்றுக்கும் பொருந்து மாதலின், L என்ற பகுதியிலுள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் யாவற்றுக்கும்

$$3x-2y+6<0$$

என்பது உண்மையாகிறது.

அவ்வாறே M என்ற பகுதியில் $P_2\ (x_2\ y_2)$ என்ற வரிசைப் பட்ட இரட்டை எடுத்துக்கொள்க. P_2 இலிருந்து OXக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு AB ஐ $P_2'\ (x_2, y_2')$ என்ற புள்ளி யிலும் OX ஐ $K_2\ (x_2, 0)$ என்ற புள்ளியிலும் வெட்டட்டும். $P_2\ (x_2,\ y_2'$ என்பது AB இன் மேலேயே இருப்பதால்

$$y_2'=\tfrac{3}{2}\,x_2+3$$

ஆகிறது. மேலும் படத்திலிருந்து $y_2<y_2'$ (இயற்கணித முறையில்) இருப்பதால்

$$y_2<\tfrac{3}{2}x_2+3$$

அதாவது $3x_2-2y_2+6>0$ எனப் பெறுகின்றோம். இது M என்ற பகுதியில் இருக்கும் எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் பொருந்துமா தலின், M என்ற பகுதியிலுள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் யாவற்றிற்கும்

$$3x-2y+6>0$$

என்பது உண்மையாகின்றது.

எனவே இப்போது நாம் ஆய்ந்தவற்றையெல்லாம் தொகுத்துப் பார்க்கும் பொழுது $3x-2y+6=0$ என்பதை உண்மையாக்கும் வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள், அச் சமன்பாட்டின் வரைபடமான AB என்ற நேர்க்கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகளுக்கு ஒன்றுக்கொன்று பொருத்தமாகவும், $3x-2y+6<0$ என்பதை உண்மையாக்கும் வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள், அத்தளத்தில் AB ஆல் பிரிக்கப்பட்ட L என்ற பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தமாகவும் ; $3x-2y+6>0$ என்பதை உண்மையாக்கும் வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள், அத்தளத்தில் AB ஆல் பிரிக்கப்பட்ட M என்ற பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளுக்குப் பொருத்தமாகவும் அமைந்திருக்கின்றன. சுருக்கமாக உண்மையாக்கும் வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளின் கணம், AB என்ற நேர்க்கோட்டின் மேலும், உண்மையாக்காத வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளின் கணம் அத்தளத்தில் அக்கோடு நீங்கலாக உள்ள புள்ளிகளில் இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே பின்வரும் பொது விதியை நாம் வகுக்கலாம் :

$Ax+By+C=0$ என்ற சமன்பாட்டமைப்பில் A, B, C மெய்யெண்களாய், A, B ஒருங்கே பூச்சியமாகாதிருப்பின், அதன் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடு; அந் நேர்க்கோடு விலக்கப்பட்ட அத்தளத்திலுள்ள புள்ளிகள் (வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள்) $Ax+By+C\lessgtr 0$ என்ற உண்மையைத்தான் பெற்றிருக்கும் ; பின் கூறப்பட்டதை மாற்றுக $Ax+By+C=0$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்காத புள்ளிகள் (வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள்) அத்தளத்தில் அந் நேர்க்கோடு விலக்கப்பட்ட L, M என்ற பகுதிகளிலிருக்கும் என்று கூறலாம்: மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகளால் இதை விளக்குவோம்.

(1) $x+y-2\gtrless 0$ க்குப் பொருத்தமானத் தீர்வுக்கணங்கள் என்ன ?

படம் 5·52: (0, 2) , (2, 0) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு $A\,B$

தளப்பகுதி L

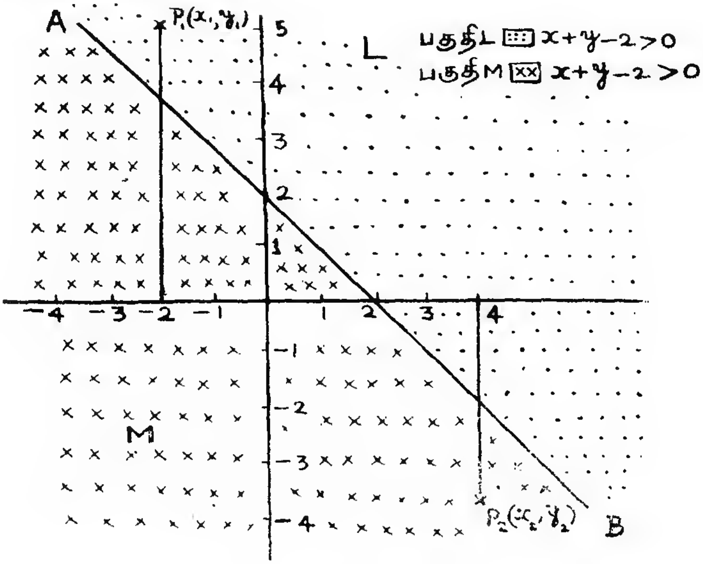
$$P_1\,(x_1\, y_1) \text{ க்கு } y_1>2-x_1$$
$$\therefore\quad x_1+y_1-2>0$$
$$\text{இங்கு } x+y-2>0 \quad (\text{பகுதி } ::::)$$

தளப்பகுதி M

$$P_2(x_2, y_2)-\text{க்கு } y_2<2-x_2$$
$$\therefore\quad x_2+y_2-2<0$$

எனவே $x+y-2<0$ [பகுதி x x x]

AB என்பது $x+y-2=0$.



படம் 5·52

எனவே $x+y-2>0$ க்குப் பொருத்தமான தீர்வுக் கணம் L என்ற பகுதியிலுள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் (கோடு AB நீங்கலாக)

$x+y-2<0$ —க்குப் பொருத்தமான தீர்வுக்கணம் M என்ற பகுதியிலுள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள். (கோடு AB நீங்கலாக).

2. $3x-y-2 \gtrless 0$ என்பவைகளின் வரைபடம் வரைக.

வரைபடம் 5.53, (0, −2), (2, 4) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு.

L பகுதி : வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளாலான தீர்வுக் கணம் (AB— நீங்கலாக)

$P_1(x_1, y_1)$க்கு $y_1 > 3x_1-2$

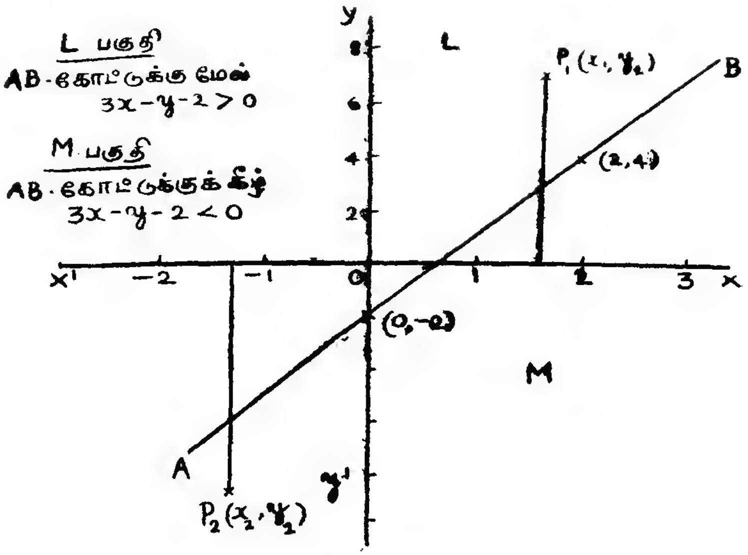
$\therefore \quad 0 > 3x_1 - y_2 - 2$

அல்லது $3x_1 - y_1 - 2 < 0$.

எனவே L பகுதி

$$3x-y-2<0.$$

M பகுதி $P_2(x_2, y_2)$ க்கு
$y_2 < 3x_2 - 2$



படம் 5·53

$\therefore \quad 0 < 3x_2 - y_2 - 2$
அல்லது $3x_2 - y_2 - 2 > 0$.

எனவே M பகுதியில் $3x - y - 2 > 0$

3. $5x + 3y = 0$ அல்லது $y = -\frac{5}{3}x$.

வரைபடம் (0,0) (3−5) வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு (படம் 5.54).

தளம் L வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளாலான தீர்வுக்கணம் (AB நீங்கலாக):

P_1 (x_1, y_1) க்கு $y_1 > -\frac{5}{3}x_1$
$\therefore 3y_1 + 5x_1 > 0$.

அதாவது $5x + 3y > 0$.

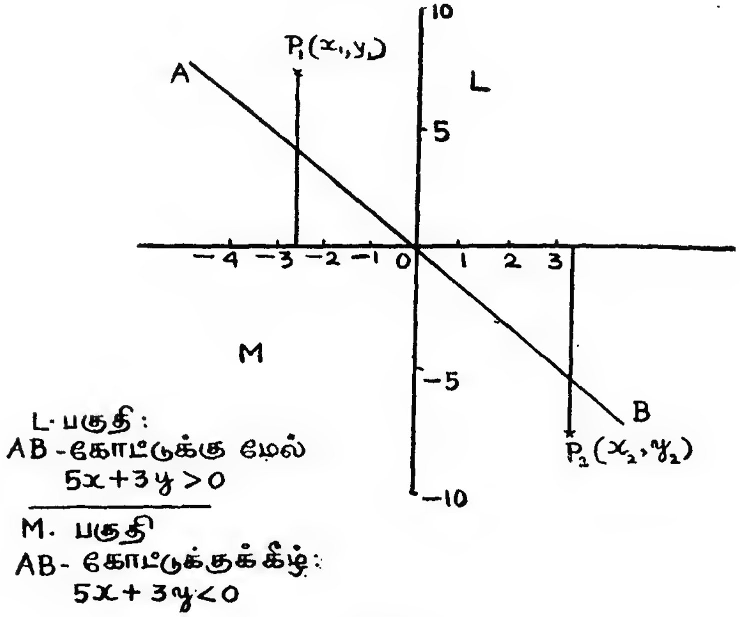
எனவே L பகுதியில் $5x + 3y > 0$ என்பதாம்.

தளம் M: வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளாலான தீர்வுக் கணம் (AB நீங்கலாக):

$P_2(x_2, y_2)$ க்கு $y_2 < -\frac{5}{3} x_2$

$\therefore 3y_2 + 5x_2 < 0$

அதாவது $5x+3y<0$. [பகுதி M]



படம் 5.54

மேலும் நேர்க்கோடு AB இன் மேலுள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளுக்கு $5x+3y=0$.

5.6 $ax+by+c$, $a'x+b'y+c'$ இரண்டும் ஒருங்கே $\gtreqless 0$ க்கு பொருத்தமான கணங்கள்

இப்போது $ax+by+b=0$

$a'x+b'y+c'=0$

என்ற சமன்பாடுகளைக் கொண்டு

a) இச்சமன்பாட்டை ஒருங்கே உண்மையாக்கும் வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள்

b) உண்மையாக்காத வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள்

(i) ஒருங்கே >0 ஆக்கும் இரட்டைகள் — அல்லது' தீர்வுக் கணம்

(ii) ஒருங்கே <0 ஆக்கும் இரட்டைகள் — அல்லது தீர்வுக்கணம் பற்றிப்பார்ப்போம்.

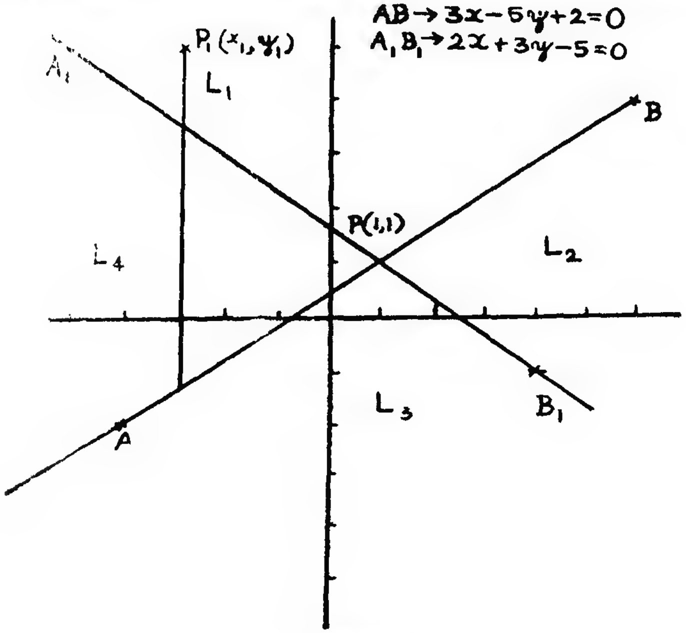
இத்தகைய ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைச் சில எடுத்துக்காட்டுகளால் காண்போம்.

1. $3x-5y+2$, $2x+3y-5$ என்ற இரு கணியங்களின் தீர்வுக் கணங்களைக் காண்போம்.

முதலில் $3x-5y+2=0$—(i)

$$2x+3y-5=0 \text{—(ii)}$$

என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளின் வரை படங்களைத் தனித்தனியாக வரைவோம். [படம் 5·61]



படம் 51.61

இச்சமன்பாடுகளை

$$y=\frac{3x+2}{5} \text{ எனவும்}$$

$$y = \frac{5-2x}{3}$$

எனவும் எழுதலாம். சமன்பாடு (i) (6,4), (−4,−2) வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு AB; இரண்டாவது சமன்பாட்டின் வரைபடம் (4,−1), (−5,5) வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு A_1B_1. $3x-5y+2=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $P_1(x_1, y_1)$ க்கு

$$y_1 > \frac{3x_1+2}{5}$$

$$\therefore \; 5y_1 > 3x_1 + 2$$

அதாவது $0 > 3x_1 - 5y_1 + 2$

$$\therefore \; 3x_1 - 5y_1 + 2 < 0$$

எனவே ABL_1L_4 என்ற பகுதியில் உள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளுக்கு

$$3x - 5y + 2 < 0$$

ABL_2L_3 என்ற பகுதியில் உள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளுக்கு

$$3x - 5y + 2 > 0.$$

$2x + 3y - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில்

$P_1(x_1, y_1)$ க்கு $\quad y_1 > \dfrac{5-2x_1}{3}$

$$\therefore \; 3y_1 > 5 - 2x_1$$

$$\therefore \; 2x_1 + 3y_1 - 5 > 0.$$

ஆகவே $A_1B_1L_2L_1$ என்ற பகுதியில் உள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் கணம்

$$3x - 5y + 2 < 0$$

$$2x + 3y - 5 > 0$$

என்பவற்றை ஒருங்கே உண்மையாக்கும். அவ்வாறே B_1PBL_2 என்ற பகுதியில் உள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் கணம்

$$3x - 5y + 2 > 0$$

$$2x + 3y - 5 > 0$$

என்பவற்றை ஒருங்கே உண்மையாக்கும்.

B_1PAL_3 என்ற பகுதியில் உள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் கணம்

$$3x - 5y + 2 > 0$$

$$2x + 3y - 5 < 0$$

என்பவற்றை ஒருங்கே உண்மையாக்கும்.

APA_1A_4 என்ற பகுதியில் உள்ள வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் கணம்

$$3x - 5y + 2 < 0$$
$$2x + 3y - 5 < 0$$

என்பவற்றை ஒருங்கே உண்மையாக்கும்.

இவ்விரு வரைபடங்களும் வெட்டுமிடமான P என்ற புள்ளி வரிசைப்பட்ட இரட்டை (!,1) க்குப் பொருந்திய புள்ளியாகும். எனவே இவ்விரு சமன்பாடுகளும் ஒருங்கே உண்மையாகும் உறுப்பு வரிசைப்பட்ட இரட்டை (1,1) என்ற ஒரே ஒன்றுதான். அதாவது பொதுத் தீர்வுக்கணம் { (,1) }. மற்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் மேற் கூறியவாறு அமையும்.

பயிற்சி 5·2

I. பின் வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைந்து $ax+by+C \gtrless 0$ என்பவற்றிற்குரிய கணங்களைக் காண்க.

1. $x-y+1$
2. $2x-3y+7$
3. $x-y$
4. $2x-3y$
5. $15x-5y-7$
6. $3x+4y-5$
7. $4-x-2y$
8. $8-x+3y$
9. $x+y$

II. பின் வருவன இரண்டிரண்டாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இரண்டும் ஒருங்கே $\gtrless 0$ என்பவற்றை உண்மையாக்கும் கணங்களை வரைபடங்கள் வரைந்து குறிப்பிடுக :

1. $2x-3y+1$
$-3x+y+2$
2. $5x-3y+2$
$2x-y$

3. $3x+y-6$
   $2x-y+1$
4. $3x+2y-13$
   $y-x+1$
5. $x-2y$
   $2x-y$

5·7 $ax^2+bx+c \lesseqgtr 0$ க்குப் பொருத்தமான தீர்வுக் கணங்கள்

இப்போது $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணங்களைக் கூறும்பொழுது $y=ax^2+bx+c$ என்ற வரைபடம் வரைந்து காண முற்படுவோம். இச்சமன்பாட்டை

a) உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணங்கள்

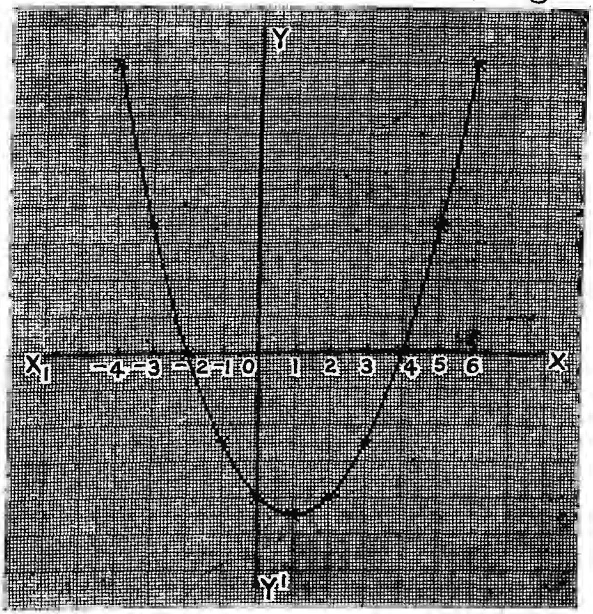
b) உண்மையாக்காத தீர்வுக்கணங்கள் பற்றிப் பார்ப்போம். [உண்மையாக்கும் தீர்வுக் கணங்கள் $y=0$ என்ற மதிப்லை பயும், உண்மையாக்காத தீர்வுக் கணங்கள் $y \lesseqgtr 0$ என்ற மதிப்பையும் தரும் என்று உணரலாம்.] இச்சமன்பாட்டைப் பற்றிப் பொதுவாகக் கவனிக்காமல் சில எடுத்துக் காட்டுக்கள் கொண்டு. விளக்குவோம்.

1. $x^2-2x-8=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணங்களைக் காண்க.

முதலில் $y=x^2-2x-8$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைவோம். (x, y) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளை பின்வரும் அட்டவணையில் காண்க.

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	−4	4	5	−5	6
x^2	0	1	1	4	4	9	9	16	16	25	25	36
$-2x$	0	−2	2	−4	4	−6	6	8	−8	−10	10	−12
−8	−8	−8	−8	−8	−8	−8	−8	−8	−8	−8	−8	−8
y	−8	−9	−5	−8	0	−5	7	16	0	7	27	16

பின்வரும் வரைபடம் (5.71) காண்க.



படம் 5.71

வரைபடத்திலிருந்து $x = -2$ க்கும் $x = 4$ க்கும் வரைகோடு x அச்சை வெட்டுகிறது. எனவே $(-2,0)$, $(4,0)$ என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் வரைகோட்டின் மேல் உள்ளன. ஆக $x^2-2x-8=0$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் கணம்

$$\{x : x = -2, 4\} = \left[\{(x, y) : (-2,0), 4,0)\}\right]$$

மற்ற எந்த x மதிப்புக்கும் [(x, y) மதிப்புக்கும்] $x^2-2x-8=0$ என்பது உண்மையாவதில்லை (படத்திலிருந்து).

$$X = \{x : -2 < x < 4\}$$

என்ற கணத்தின் உறுப்புக்களுக்கு $y < 0$ ஆகவும் (அதாவது $x^2-2x-8<0$ ஆகவும்)

$$X_1 = \{x : x < -2, x > 4\}$$

என்ற கணத்தின் உறுப்புக்களுக்கு $x^2-2x-8>0$ (அதாவது $y > 0$) ஆகவும் இருப்பதைக் காணலாம். எனவே $x^2-2x8=0$

என்பதை உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம்

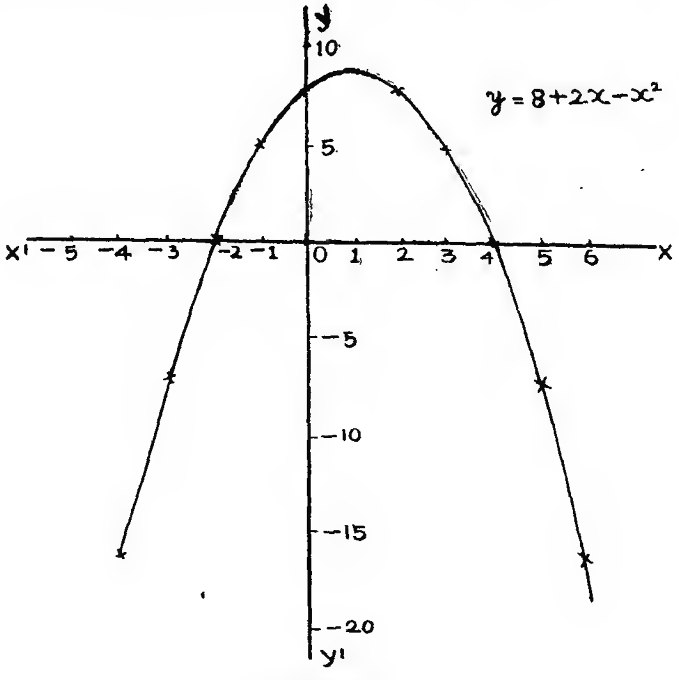
$$\{ x : x = -2, 4 \}$$

என்றும் X என்பது $x^2-2x-8 > 0$ க்கு உண்மைக்கணம் (truth set) என்றும் X_1 என்பது $x^2-2x-8 < 0$க்கு உண்மைக் கணம் என்றும் அறிகின்றோம்.

2. $8+2x-x^2 \gtrless 0$ என்ற மூன்றின் தீர்வுக்கணங்களைக் கூறுக.

$y=8+2x-x^2$ எனக்கொள்வோம். அதன் வரைபடத்தை [படம் 5·72] வரைந்து பார்ப்போம். $y = 8+2x-x^2$ என்பதற்கு வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளை எழுதுவோம்.

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	−5	6	
y	8	9	5	8	0	5	−7	0	−16	−7	−27	−16	



படம் 5·72

வரைப்படத்தைப் பார்த்தால் $x = -2$க்கு $x = 4$க்கும் வரைகோடு x அச்சை வெட்டுகிறது. எனவே $(-2,0)$, $(4,0)$ என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள் வரை கோட்டின் மேல் உள்ளன. ஆகவே $8+2x-x^2=0$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம் $\{-2,4\}$ மற்றெந்த x மதிப்புக்கும் $8+2x-x^2=0$ என்பது உண்மையாவதில்லை. படத்தைப் பார்த்தால்

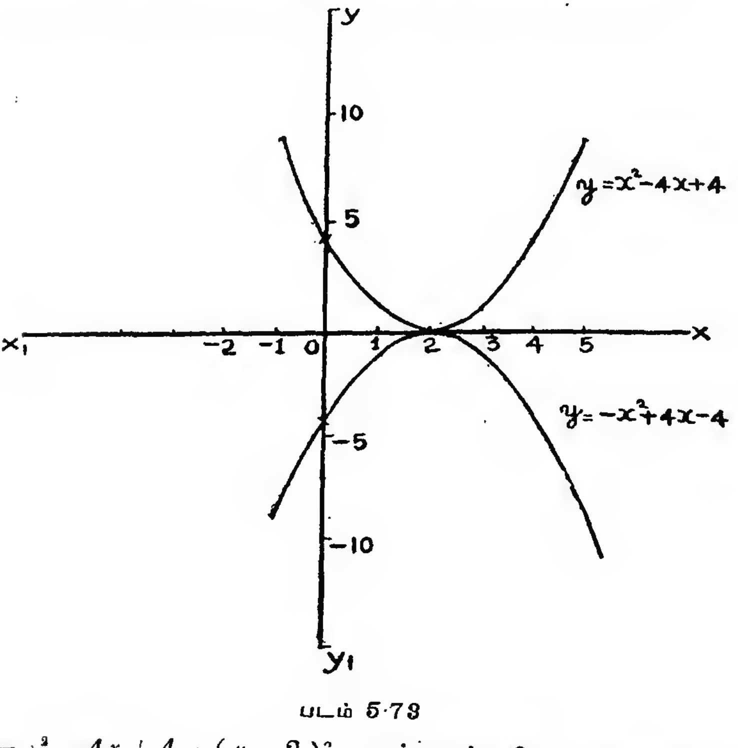
$$X = \{ x : x < x < 4 \}$$

என்ற கணத்தின் உறுப்புகளுக்கு $8 + 2x - x^2 < 0$ என்பது உண்மையாகிறது.

$$X_1 = \{ x : -2 < -2,\ x > 4 \}$$

என்ற கணத்தின் உறுப்புக்களுக்கு $8 + 2x - x^3 < 0$ என்பது உண்மையாகிறது.

3. $y = x^2 - 4x + 4$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டு அதன் வரைபடத்தை வரைந்து பார்ப்போம்



படம் 5·73

$y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ என்பதற்குறிய வரிசைபட்ட இரட்டைகளை எழுதுவோம்.

வரைபடத்தைப் பார்த்தால் $x = 2$ என்ற ஒரே இடத்தில் வரைகோடு x அச்சைத் தொடுகின்றது. எனவே (2,0) என்ற

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	4
y	4	1	9	0	16	1	25	4

வரிசைப்பட்ட இரட்டை வரைகோட்டின் மேல் உள்ளது. ஆகவே $x^2-4x+4=0$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் மதிப்புக்களின் கணம் $\{2\}$ அல்லது $\{2, 2\}$. மற்றெந்த x மதிப்புக்கும் $x^2 - 4x + 4 = 0$ என்பது உண்மையாவதில்லை. படத்தைப் பார்த்தால்

$X = \{ x : x = 2$ விலக்கிய மற்ற எந்த மெய்யெண்ணும் $\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்புக்களுக்கு $x^2 - 4x + 4 > 0$ உண்மையாக இருப்பதைக் காணலாம். $x^2 - 4x + 4 < 0$ உண்மையாக்கும் $\varnothing$ என்ற வெறுங்கணம்.

குறிப்பு : இப்போது $y = -x^2 + 4x - 4$ என்ற சமன்பாட்டின் வரை படம் வரைந்து பார்த்தால் இதே வளைவரை தலைகீழாக x அச்சை $x = 2$ என்ற ஒரே இடத்தில் தொடும். எனவே $-x^2 + 4x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை உண்மையாக்கும் மதிப்புக்களின் கணம் $\{ 2 \}$ அல்லது $\{2,2\}$ மற்றெந்த x மதிப்புக்கும் $-x^2 + 4x - 4 = 0$ என்பது உண்மையாவதில்லை. மேலும் படத்தைப் பார்த்தால் [படம் 5.74]

$X = \{ x : x = 2$ விலக்கிய மற்றெந்த மெய்யெண்ணும் $\}$ என்ற கணத்தின் உறுப்புக்களுக்கு

$$-x^2 + 4x - 4 < 0$$

உண்மையாக விருப்பதைக் காணலாம்.

$$-x^2 + 4x - 4 > 0$$

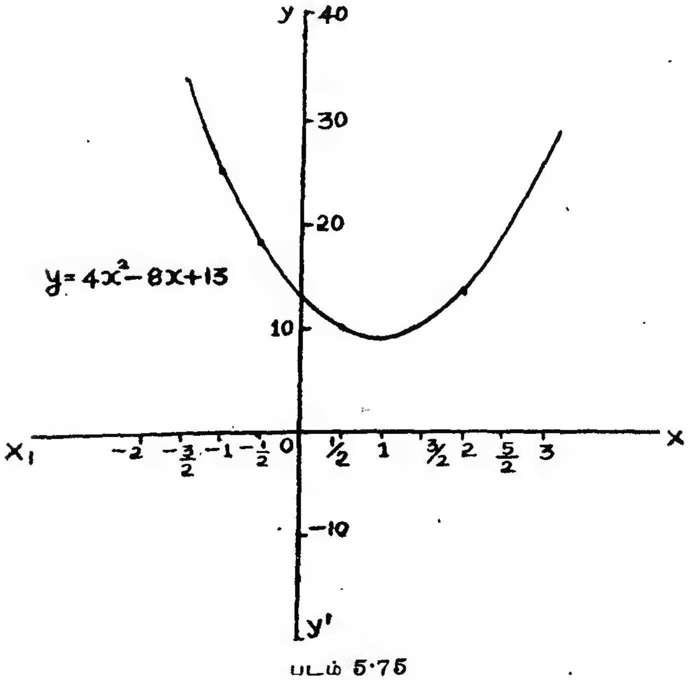
என்பதை உண்மையாக்கும் கணம் $\varnothing$ என்ற வெறுங்கணம்.

4. $y = 4x^2 - 8x + 13$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டு $4x^2 - 8x + 13 \gtreqless 0$ என்பவைகளின் தீர்வுக்கணங்களைக் கூறுக.

முதலில் $y = 4x^2 - 8x + 13$ க்குரிய வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளை எழுதுவோம்.

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	2	3
y	13	10	18	9	25	10	34	13	25

கீழே வரைபடம் (படம் 5.75) காண்க. வரை படத்தை நோக்குங்கால் எந்த இடத்திலும் வரைகோடு x அச்சை வெட்டவில்லை. முழுவதும் x- அச்சுக்கு மேலேயே இருக்கிறது.



படம் 5·75

எனவே எந்த மெய்யெண் மதிப்புக்கும்

$$4x^2-8x+13 \leq 0$$

என்பது பொருந்தவில்லை. எல்லா மெய்யெண்களுக்கும்

$$4x^2-8x+13 > 0$$

என்பதே பொருத்தமாகின்றது. எனவே

$$X=\{ x: 4x^2-8x+13 \leq 0 \}=\varnothing$$

$$X_1=\{x: 4x^2-8x+13 > 0\} = \text{Real Nos.}$$

பயிற்சி

$y = -4x^2 - 8x + 13$ என்பதின் வரைபடம் வரைந்து $-4x^2 - 8x + 13 \gtreqless 0$ என்பவைகளின் தீர்வுகளைக் காண்க.

இப்போது எல்லா வரைபடங்களையும் எடுத்துக் கொண்டு நாம் என்ன பொதுவான முடிவுகள் பெறலாமென பார்ப்போம்.

(1) பொது அமைப்பு : $y = ax^2 + bx + c$.

(2) a கூட்டு எண்; $a-$ குறையெண் என இரு பிரிவுகளாக நாம் எடுத்துக் கொள்ளலாம். அதாவது x^3 இன் கெழு, கூட்டு எண் அல்லது குறையெண் என இரு பிரிவுகளாகக் கொள்ளலாம்.

(3) வரைபடங்களை மூன்று பெரும் பகுதிகளாக பாகுபாடு செய்யலாம். (i) x, அச்சை இரண்டு திட்டமான இடங்களில் வெட்டுகின்ற வரைபடங்கள்; (ii) x அச்சை ஒரே இடத்தில் தொடுகின்ற வரை படங்கள்; (iii) x அசசைத் தொடவோ, வெட்டவோ செய்யாத வரை படங்கள் என்ற மூன்று வகையான வரைபடங்கள் உள்ளன.

(4) இந்தப் பிரிவுகளின் அடிப்படையில் $ax^5 + bx + c \gtreqless 0$ என்பதை உண்மையாக்கும் கணங்கள் எப்படி அமைகின்றன என்பதைப் பார்க்கலாம்.

பயிற்சி 5.3

1. பின் வருவனவற்றை வரைபடம் வரைந்து சரி பார்க்க.

a)	$y = x^2 - 1$;	$x^2 - 1 = 0$	மெய்யாக்கும் தீர்வுக்கணம்	$\{-1, 1\}$
		$x^2 - 1 > 0$	மெய்யாக்கும் தீர்வுக்கணம்	$\{x : x < -1, x > 1\}$
		$x^2 - 1 < 0$	மெய்யாக்கும் தீர்வுக்கணம்	$\{x : -1 < x < 1\}$
b)	$y = 2x^2 + 1$	$2x^2 + 1 \le 1$	மெய்யாக்கும் தீர்வுக்கணம்	$\varnothing$
		$2x^2 + 1 > 0$	,,	$\{x : x$ மெய்யெண்$\}$
c)	$y = 4 - x^2$	$4 - x^2 = 0$	,,	$\{-2, 2\}$
		$4 - x^2 > 0$	,,	$\{x : -2 < x < 2\}$
		$4 - x^2 < 0$	,,	$\{x : x < -2\}$ $\{x > 2\}$

d) $y = x^2$;	$x^2=0$	,,	$\{0\}$
	$x^2>0$	,,	$\{x : x$ மெய்யெண்$\}$
	$x^2<0$	,,	$\emptyset$

2) பின் கொடுக்கப்பட்ட சார்புகள் $y= ax^2+bx+c$ என்ற அமைப்பில் உள்ளன. வரைபடம் வரைந்து $y=0, y \lesseqgtr 0$ என்பவற்றை மெய்யாக்கும் கணங்களைக் கூறுக.

a) $3x^2-x-2$

b) $2+x-3x^2$

c) $4x^2+4x+1$

d) x^2-6x+9

e) $6x-x^2-9$

f) $x^2+8x+16$.

g) x^2+3x+7.

h) $13-7x+x^2$

i) $3x-x^2-6$

j) $x^2+6x+12$

k) $x^2-6x-12$.

VI. பின்னிணைப்பு

(Appendix)

5.7 இல் $x^2-2x-8 \gtreqless 0$ என்பதின் தீர்வுக் கணங்களை வரைபடம் மூலம் கண்டோம். ஈண்டு இதன் தீர்வை மற்றொரு முறையில் காண்போம்:

$$x^2-2x-8=(x-4)(x+32)$$

எனவே $x^2-2x-8=0$ எனின்

$$(x-4)(x+2)=0$$

அதாவது $x=4$; $x=-2$. எனவே $x^2-2x-8=0$ என்பதின் தீர்வுக்கணம்

$$\{x : x=4, x=-2\}.$$

(ii) $x^2-2x-8<0$ எனில் $(x-4)(x+2)<0$.

எனவே

(a) $x-4<0, x+2>0$ என்ற இரண்டும் ஒருங்கே பொருந்தவேண்டும்,

அல்லது (b) $x-4>0$, $x+2<0$ என்ற இரண்டும் ஒருங்கே பொருந்தவேண்டும்.

$\therefore$ (a) என்பதை உண்மையாக்கும் தீர்வுக்கணம்

$$\{x : -2<x<4\}$$

(b) என்பதை உண்மையாக்குவது

$$\{x : x>4, x<-2\}$$

என்ற கணமாகும். $x>4$, $x<-2$ என்ற எல்லா மெய்யெண் மதிப்பிற்கும் y மதிப்பு எப்பொழுதும் >0 ஆக இருப்பதைப்

படம் 5·71 ஐக்கொண்டும் காணலாம். எனவே $x > 4$, $x < -2$ என்பதற்கு

$$y = x^2 - 2x - 8 < 0.$$

என்பது எப்பொழுதும் ஒவ்வாது. எனவே (b) என்பதை உண்மையாக்கும் தீர்வுக் கணம் $\varnothing$ என்பதாகும்.

(iii) $x^2 - 2x - 8 > 0$ எனில் $(x-4)(x+2) > 0$. எனவே

(c) $x - 4 > 0$; $x + 2 > 0$

(d) $x - 4 < 0$; $x + 2 < 0$

(c) என்பது $x > 4$, $x > -2$ என்பதாம். நமக்கு $y = (x-4)(x+2) > 0$ என்பது தேவை. எனவே படத்திலிருந்து $x > 4$ என்ற மதிப்பிற்கும், $x < -2$ என்ற மதிப்பிற்கும் y இன்மதிப்பு > 0. எனவே (c) இன் தீர்வுக்கணம்

$$\{x : x > -2, x > 4\}$$

என்பதாம்,

(d) என்பதற்கு $x < 4$, $x < -2$ என்பதாம். ஆனால் $x < 4$க்கு $y < 0$. மேலும் $x < -2$க்கு $y > 0$. எனவே (b) என்பதின் தீர்வுக்கணம்

$$\{x : x < -2\}$$

என்பதாம். எனவே (iii) இன் தீர்வுக்கணம்

$$\{x : x < -2, y > 4\}$$

என்பதாகும். ஏனெனில் (d) இன் தீர்வுக்கணம் (c) இன் உள்ளடக்கம். [Solution set (d) ⊂ Solution set of (c)].

குறிப்பு: இரண்டாவது முறைக்கு முதன் முறையினால் கிடைக்கும் வரைபடம் பயன்படுகிறது என்பதை மாணவர்கள் கவனிக்க வேண்டும்.

விடைகள்

பயிற்சி 1

1. (i) $\{31, 33, 35, 37, 39\}$

   (ii) $\emptyset$

   (iii) $\{30, 32, 34, 36, 38, 40\}$

   (iv) $\{36\}$

2. { தே, வ, ரு}

3. $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b,\}$ $\{a, c,\}$ $\{a, d\}, \{b, c\}$ $\{b, d\}, \{c, d\}$
   $\{a, b, c,\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}$ $\{b, c, d\}$

4. (i) சரி

   (ii) சரி

   (iii) தவறு ; $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$ என்பது சரி

   (iv) தவறு

   (v) சரி

   (vi) தவறு ; $A \subseteq A$ என்பது சரி

   (vii) தவறு ; $A \supseteq A$ என்பது சரி

5. சரி

6. சரி

7. $B \subset A$ என்பது பொருந்தும்

8. (i) $A \subset B$

   (ii) மூன்றும் பொருத்தமல்ல, $A \cap B = \emptyset$ என்பது தான் பொருந்தும்

   (iii) $A = B$

   (iv) $A \neq B$

(v) $A \supset B$

(vi) எதுவும் பொருத்தமல்ல; $A \cap B = \varnothing$ என்பதும் பொருந்தும்.

9. (1) அத்தகைய கணம் இருத்தல் இயலாது.

(2) $\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$.

(3) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, , , , 20\}$
$A_1 = \{6, 12, 18, 24, \dots \quad \dots\} \subset A$
$B_1 = \{6, 12, 18, 24, \dots \quad \dots\} \subset B$
$A_1 = B_1$

10. $\varnothing$ — வெற்று கணம்

$\{0\}$ — பூச்சியத்தை உறுப்பாகக் கொண்ட ஒருறுப்புக் கணம்

$\{\varnothing\}$ வெற்றுக்கணத்தை உறுப்பாகக் கொண்ட ஒருறுப்புக்கணம்.

பயிற்சி 2

1. (a) $\{5\}$

(b) $\varnothing$

(c) $\{1,2,3,4,5,7\}$

4. a) $\{A, C, E, G, I, M, R, Y\} = A \cup B$

b) $\{A, R, Y\} = B \cup C$

c) $\{A, P, R, Y\} = (A \cap B) \cup C$

d) $\left\{ A, R \right\} = (A \cap B) \cap C$

e) $\left\{ A, R \right\} = A \cap (B \cap C)$

பயிற்சி 3

1. a) இந்திய காலாட் படை தவிர மற்றெல்லா படைகளும்

b) மருத்துவப்பட்டம் பெருத சென்னை மக்கள்

c) $\{ x : 0 < x < 1,$ x அளவுக்கிணங்கா மெய்யெண்$\}$

d) $\{ x : x =$ சதுரமற்ற நாற்கோட்டுருவம் $\}$

e) $E = \{x : x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$
$A = \{x : x = -1, -2, -3\}$
$A^1 = \{x : x = 1, 2, 3\}$

2. $A - B = \{1, 2, 3\}$

3. எப்பொழுதும் பொருந்தாது. $A = B$ எனின் தான் பொருந்தும்.

4. a) சரி
b) சரி
c) சரி
d) சரி
e) சரி
f) சரி

பயிற்சி 4

I 1. சரியான அமைப்பு
$D =$ அரங்கம் $= \{0, 1, 2, 3\}$
$R =$ வீச்சு $= \{1, 4\}$

2. சரியான அமைப்பு
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{4\}$

3. சரியான அமைப்பல்ல

4. சரியான அமைப்பு
$D = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{a, b, c\}$

5. சரியான அமைப்பு
$D = \{a, b, c, d\}$
$R = \{1, 2\}$

II. 1. $D = \{a\}$
$R = \{1\}$

2. $D = \{1, 2, 3\}$
$R = \{2, 3, 4\}$

3. $D = \{x : x,$ முழு எண் $\}$
$R = \{x : x$ முழு எண்களின் மூன்றுபடி $\}$

4. $D = \{x : x,$ கூட்டு முழு எண்
$R = \left\{x : x = \frac{1}{n}, n\right.$ கூட்டு முழு எண் $\}$

III. 1. $D = \{ x : x$ மெய்யெண் $\}$
$R = \{ y : 0 \leq y \leq 1, y = x^2 \}$

2. $D = \{ x : x$ ஒரு முக்கோணம் $\}$
$R = \{ x : x$ மெய்யெண் சதுர அலகில் $\}$

பயிற்சி 5·3

	= 0 தீர்வுக்கணம்	>0 தீர்வுக்கணம்	<0 தீர்வுக்கணம்
5. a)	$\{ 1, -\frac{2}{3} \}$	$\{ x : x < -\frac{2}{3}, x > 1 \}$	$\{ x : -\frac{2}{3} < x < 1 \}$
b)	$\{ 1, -\frac{2}{3} \}$	$\{ x : -\frac{2}{3} < x < 1 \}$	$\{ x : x < \frac{2}{3}, x > 1 \}$
c)	$\{ -\frac{1}{2} \}$	$\{ x : x$ மெய்யெண் $\frac{1}{2}$ தவிர $\}$	$\varnothing$
d)	$\{3\}$	$\{ x : x$ மெய்யெண் 3 தவிர $\}$	$\varnothing$
e)	$\{ 3 \}$	$\varnothing$	$\{ x : x$ மெய்யெண் 3 தவிர $\}$
f)	$\{ -4 \}$	$\{ x : x$ மெய்யெண் 4 தவிர $\}$	$\varnothing$
g)	$\varnothing$	$\{ x : x$ மெய்யெண் $\}$	$\varnothing$
h)	$\varnothing$	$\{ x : x$ மெய்யெண் $\}$	$\varnothing$
i)	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{ x : x$ மெய்யெண் $\}$
j)	$\varnothing$	$\{ x : x$ மெய்யெண் $\}$	$\varnothing$
k)	$\{ 3-\sqrt{21}, 3+\sqrt{21} \}$	$\{ x : x < 3-\sqrt{21}$ $x > 3+\sqrt{21}$	$\{ x : 3-\sqrt{21} < x < 3+\sqrt{21} \}$

நுண் கணிதம்

கலைச் சொல்லகராதி

A

Abeissa	—	கிடைத்தூரம், மட்டாயம், x ஆயத்தொலை
Absolute	—	தனி
,, value	—	தனி மதிப்பு, மட்டு மதிப்பு
Acceleration	—	முடுக்கம்
Accurate	—	மிகச் சரியான, பிழையேயில்லாத
Algebra	—	இயற் கணிதம்
Algebraic function	—	இயற் கணிதச் சார்பு
,, identity	—	இயற் கணித முற்றொருமை
,, operator	—	இயற் கணிதச் செயலி
,, symbol	—	இயற் கணிதக் குறி (குறியீடு)
Alternate	—	ஒன்றுவிட்ட
Angle	—	கோணம்
,, acute	—	குறுங்கோணம்
,, adjacent	—	அடுத்துள்ள கோணம்
,, complementary	—	நிரப்புக் கோணம்
,, Right	—	செங்கோணம்
,, supplementary	—	மிகை நிரப்புக் கோணம்
,, of inclination	—	சாய்வுக் கோணம்
,, of intersection	—	வெட்டுக்கோணம்
Approximate	—	தோராயமான
,, Value	—	தோராய மதிப்பு

Arbitrary	— யாதாமொரு
,, constant	— யாதாமொரு மாறிலி
Arc	— வில்
,, of a circle	— வட்டவில்
Associative law	— தொகுப்பு விதி, சேர்ப்பு விதி
Asymptote	— கந்தழித் தொடுவரை
Axes of co-ordinates	— நிலை அச்சுக்கள், ஆயங்கள் x, y அச்சுக்கள்
Axiom	— வெளிப்படையுண்மை
Axis	— அச்சு
,, of revolution	— சுழலச்சு
Axis of symmetry	— சமச் சீரச்சு

B

Base	— அடிக்கோடு
Binomial	— ஈருறுப்பு

C

Calculate	— கணக்கிடு
Calculus	— நுண்கணிதம்
,, differential	— வகை நுண் கணிதம்
,, Integral	— தொகை நுண் கணிதம்
Cancel	— நீக்கு
Capacity (Volume)	— கொள்ளளவு
Case	— வகை
Centre	— மையம்
Chord	— நாண்
,, common	— பொது நாண்
Cipher (Zero)	— பூச்சியம்
Circle	— வட்டம்
,, semi	— அரைவட்டம்
Co-cffieient	— குணகம், கெழு
,, dffterential	— வகை நுண்கெழு, வகைக் கெழு
Common	— பொது
,, logarithm	— பொது மடக்கை
,, tangent	— பொதுத் தொடு வரை
Commutative law	— மாற்றுவிதி
Cone	— கூம்பு

Continuity	— தொடர்ச்சி
Continuous	— தொடர்ச்சியான
,, curve	— தொடர்ச்சியான வளைவரை
,, function	— தொடர்ச்சியான சார்பு
,, variable	— தொடர் மாறி
,, variation	— தொடர் மாறல்
Continuum	— தொடரகம்
,, arithmetical	— எண்களின் தொடரகம்
,, linear	— நேர்க்கோட்டுப் புள்ளிகளின் தொடரகம்
Convention	— மரபு
Converse	— மறுதலை
Co-ordinates	— ஆயத் தொலைகள்
Corollary	— கிளைத் தேற்றம்
Curve	— வளைவரை
Curved surface	— வளை பரப்பு

D

Decrease	— குறைதல்
Decreasin functiong	— குறையும் சார்பு
Define	— வரையறு
Definite	— வரையறுத்த, குறிப்பிட்ட, திட்டமான
,, Integral	— திட்டமான தொகை, வரையறுக்கப்பட்ட தொகை
Definition	— வரையறை
Degree (angle)	— பாகை
Denominator	— பின்னக் கீழெண், கீழெண்
Dependent	— சார்ந்த
,, variable	— சார்புடை மாறி
Derivatiue	— வகைக்கெழு
Diagram	— வரிப்படம், விளக்கப் படம்
Diameter	— விட்டம்
,, semi	— அரை விட்டம்
Difference	— வேறுபாடு
Differentiate	— வகைக்கெழு காண்
Differentiable	— வகைக்கெழு காணத் தக்க, வகையிடத் தக்க
,, function	— வகையிடத் தக்க சார்பு

Differential — வகையிட்ட நுண்ணெண்
,, Calculus — வகை நுண் கணிதம்
,, coefficient — வகைக் கெழு
,, operator — வகைக் கெழுச் செயலி
Dis-continuity — தொடர்ச்சியின்மை
Discontinuous — தொடர்ச்சியற்ற
,, function — தொடர்ச்சியற்ற சார்பு

E

Element — உறுப்பு, மூலகம், நுண் பகுதி
Equation — சமன்பாடு
,, solution of an — ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வு (கள்)
Error — பிழை
,, absolute — தனிப்பிழை
Even — இரட்டை
,, funetion — இரட்டைச் சார்பு, இரட்டைப் படைச் சார்பு
Explicit function — வெளிப்படைச் சார்பு; நேர் முகச் சார்பு
Expression — கோவை

F

Factor — சினை, காரணி, பகுப்பு
Figure — இலக்கம், எண், உருவம், படம்
Finite — முடிவுள்ள, திட்டமான
Force — விசை
Form — வடிவம், உருவம், அமைப்பு
Formula — வாய்பாடு
Function — சார்பு
,, even — இரட்டைச் சார்பு
,, odd — ஒற்றைச் சார்பு

G

General — பொதுவான
,, solution — பொதுத் தீர்வு
Geometry — வடிவ கணிதம்

Geometry Algebraic	— இயன்முறை வடிவ கணிதம்
,, Analytic	— ஆயத்தொலை வடிவ கணிதம்
Gradient	— சாய்வு விகிதம், சரிவு
,, of a curve	— ஒரு வளை கோட்டின் சரிவு
Graph	— வரை படம், கோட்டுருவப் படம்
Graph paper	— வரைபடத் தாள்
,, of a function	— ஒரு சார்பின் வரைபடம்

H

Hypotenuse	— செம்பக்கம்

I

Identical	— சர்வ சம, முழுதும் ஒத்த
Identity	— முற்றொருமை
Illustration	— எடுத்துக்காட்டு
Imagine	— கற்பனை செய்து காண்
Implicit function	— உட்படு சார்பு, மறைமுகச் சார்பு
Increasing function	— வளரும் சார்பு
Independent Variable	— சார்பில் மாறி
Inequality	— சமனின்மை
Infinite	— முடிவற்ற, கந்தழி
Infinitesimal	— மிக நுண்ணிய
Infinity	— கந்தழி
,, tangent at	— கந்தழித் தொடுவரை
Inflexion	— வளைவு மாற்றம்
,, point of	— வளைவு மாற்றப் புள்ளி
Initial	— தொடக்கம்
,, velocity	— தொடக்க வேகம்
Integer	— முழு எண்
,, positive	— கூட்டு முழு எண்
,, negative	— குறை முழு எண்
Integral	— தொகை
,, calculus	— தொகை நுண் கணிதம்
,, definite	— வரையறுத்த தொகை, அளவுபட்ட தொகை
,, indefinite	— அளவுபடாத தொகை, வரையருத் தொகை

Integrand	— தொகைச் சார்பு
Integrate	— தொகை காண்க
Integration	— தொகை காணல்
,, Term by Term	— தொடர் உறுப்புத் தொகை காணல்
Intersect	— வெட்டு
Interval	— இடைவெளி
,, open	— திறந்த இடைவெளி
,, closed	— மூடிய இடைவெளி
Inverse	— நேர் மாறான
,, function	— நேர்மாறு சார்பு
Irrational	— அளவுக் கிணங்காத

J

Join	— சேர், இணை

K

Known quantity	— தெரிந்த கணியம்

L

Low	— விதி
,, Associative	— தொகுப்பு விதி
,, Commutative	— மாற்று விதி
;, Distribution	— பங்கீட்டு விதி
Limit	— எல்லை
,, tends to a	— ஓரெல்லையை நாடுகிறது, அணுகுகிறது, நெருங்குகிறது.
Line	— கோடு, வரி, வரை
,, Curved	— வளை கோடு
,, Horizontal	— கிடைக்கோடு
,, Straight	— நேர்க்கோடு
,, Vertical	— நிலைக்குத்துக் கோடு
Locus	— இயங்கு வழி
Logarithm	— மடக்கை
,, common	— பொது மடக்கை
,, Napierian	— நேப்பியரின் மடக்கை

M

Magnitute	— அளவு
Maximum	— மீப்பெரு
,, value	— மீப்பெரு மதிப்பு
Method	— முறை
Minimum	— மீச்சிறு
,, value	மீச்சிறு மதிப்பு
Minus	— கழி, குறை
Modulus	— மட்டு, எண்ணளவு
Motion	— இயக்கம்
Multiple	— மடங்கு

N

Nearly	— ஏறத்தாழ, ஏறக்குறைய
Negative	— குறை
,, number	— குறையெண்
,, sign	— குறைக் குறி, கழித்தல் குறி
Normal	— செங்கோடு
Null	— பூச்சியம்
Number	— எண்
,, Abstract	— வெற்றெண்
,, Commensurable	— அளவுக்கிணங்கிய எண்
,, Complex	— சிக்கலெண்
,, Even	— இரட்டைப்படை யெண்
,, Imaginary	— கற்பனை யெண்
Number Irrational	— அளவுக்கிணங்காத யெண்
,, odd	— ஒற்றைப் படையெண்
Notation	— எண் குறியீடு
Numerical	— எண்ணுக்குரிய, எண்ணுலாகிய
,, Value	— எண் பெறுமானம், மட்டு மதிப்பு
Numerator	— பின்ன மேலெண், மேலெண்

O

Object	— பொருள்
Obtuse angle	— விரிகோணம்
Odd	— ஒற்றை

Odd function — ஒற்றைச் சார்பு, ஒற்றைப் படைச் சார்பு,
One and only one — ஒன்று, ஒரே ஒன்று
One to one — ஒன்றுக்கொன்று
,, Correspondence — ஒன்றுக்கொன்று, ஒரே ஒன்று என்ற தொடர்பு (சார்பு)
Open interval — திறந்த இடைவெளி
Operation — செய்கை
Operator — செயலி
,, differential — வகைச் செயலி
Opposite — எதிரான
Order — வரிசை
,, ascending — ஏறு வரிசை
,, descending — இறங்கு வரிசை
Ordinate — நிலைத் தூரம், குத்தாயம், y ஆயத் தொலை
Origin — ஆய ஆதி
Orthogonal — செங்குத்தான
,, intersection — செங்குத்து வெட்டு
Orthogonally — செங்குத்தாக
,, intersect — செங்குத்தாக வெட்டு

P

Pairs — இரட்டைகள்
,, ordered — வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள்
Parabola — பரவளைவு, பரவளையம்
Parallel — ஒரு போகு, இணை
,, lines — ஒரு போகுக் கோடுகள், இணை கோடுகள்
Part — பகுதி
Particle — துகள்
Path — வழி, பாதை
Perfect square — சரியான இருபடி
Perimeter — சுற்றளவு
Period — கால வட்டம்
Perpendicular — செங்குத்தான, செங்குத்து
Plane — தளம்
Plot — இடங்குறி
Point — புள்ளி

Point fixed — நிலைத்த புள்ளி
,, of inflexion — வளைவு மாற்றப் புள்ளி
,, Turning — திருப்பப்புள்ளி
Polygon — பல் கோணம்
,, Regular — சீரான பல்கோணம், ஒழுங்கான பல்கோணம்
Positive — கூட்டு, நேர், மிகை
,; number — கூட்டெண்
,, quantity — கூட்டுக் கணியம்
Principle — தத்துவம்
Product — பெருக்கம், பெருக்குத் தொகை
Proof — தெரிப்பு, நிறுவன் முறை
Property — பண்பு
Prove — நிறுவுக

Q

Quadrant — வட்ட நாற்கூறு, கால் வட்டம்
,, first — முதல் வட்ட நாற்கூறு
,, second — இரண்டாம் ,,
,, Third — மூன்றும் ,,
,, Fourth — நான்காம் ,,
Quadratic — இருபடி
,, equation — இருபடிச் சமன்பாடு
,, expression — இருபடிக் கோவை
Quantity — கணியம்
,, known — தெரிந்த கணியம்
,, unknown — தெரியாத கணியம்

R

Radian — ஆரையன்
,, measure — ஆரையனளவு (வை)
Radius — ஆரை, ஆரம், அரைவிட்டம்
Range — இடைவெளி
Rate — வீதம்
,, of change — மாறு வீதம்
Ratio — விகிதம்
,, constant — மாறுவிகிதம்

direet	—	நேர் விகிதம்
Ratio inverse	—	நேர் மாறு விகிதம்
Real	—	மெய்யான
,, number	—	மெய்யெண்
Rectangle	—	செவ்வகம்
Regular	—	ஒழுங்கான
Remainder	—	மீதி
Revolutien	—	சுற்றல், சுற்று
Root	—	மூலம்
Rotate	—	சுழல்
Rotation	—	சுழற்சி
Rule	—	விதி

S

Scale	—	அளவு, அளவுகோல், அளவுத்திட்டம்
,, change of	—	அலகு மாற்றம்
Seetion	—	வெட்டு முகம்
Sector	—	வட்டப் பகுதி, ஆரைச் சிறை, வட்டகோணபகுதி
Segment	—	துண்டு
,, Major	—	பெருந்துண்டு
,, Minor	—	சிறுதுண்டு
,, of a sphere	—	ஒரு கோளத்துண்டு
Semi — cicle	—	அரைவட்டம்
Semi — diametcr	—	அரை விட்டம்
Side	—	பக்கம்
Sign	—	குறி
,, eonvention of	—	குறி மரபு
Solution	—	தீர்வு
Solve	—	தீர்வு காண்
Square	—	சதுரம், சமசதுரம்
Standard	—	தரமான, நியமமான
Surfaee	—	மேற் பரப்பு
Symbol	—	குறியீடு
Symmetry	—	சமச்சீர், ஒரேசீரான
,, axes of	—	சமச்சீரச்சு
Symmetric	—	சமச்சீர் பெற்ற, சமச்சீரான
System (Method)	—	முறை

T

Table	— வாய்பாடு, அட்டவணை
Tangent	— தொடுகோடு, தொடுவரை
Tends to	— நாடுகிறது, அணுகுகிறது, நெருங்குகிறது.
Term	— உறுப்பு
Time	— காலம்
Theorem	— தேற்றம்
Theory	— கொள்கை, அறிமுறை
Total	— மொத்தம்
Transformation	— மாற்றம், உருமாற்றம்
Triangle	— முக்கோணம்
,, equiangular	— சமகோண முக்கோணம்
,, equilateral	— சமபக்க முக்கோணம்
,, isosceles	— இரு சமபக்க முக்கோணம்
,, right angled	— செங்கோண முக்கோணம்
Trigonometry	— கோண கணிதம்
Trigonometric	— கோண கணித
,, equation	— கோண கணிதச் சமன்பாடு
,, function	— கோண கணிதச் சார்பு
,, ratio	— கோண கணித விகிதம்

U

Unit	— அலகு
,, absolute	— தனியலகு
,, fundamental	— அடிப்படையலகு

V

Value	— மதிப்பு
,, absolute	— மட்டு மதிப்பு
,, approximate	— தோராய மதிப்பு
,, integral	— முழு எண் மதிப்பு
,, maximum	— மீப்பெரு மதிப்பு
,, minimum	— மீச்சிறு மதிப்பு
Variable	— மாறி
,, dependent	— சார்புடை மாறி
,, independent	— சார்பில் மாறி
Vary	— மாறு
,, directly as	— நேர் விகிதத்தில் மாறு

,, inversely as — நேர் மாறு விகிதத்தில் மாறு
Velocity — வேகம், திசை வேகம்
,, angular — கோண வேகம்
,, average — சராசரி வேகம்
,, initial — ஆரம்ப வேகம், தொடக்க வேகம்
Verification — சரி பார்த்தல்
Verify — சரி பார்
Vertex — உச்சி
Volume — கொள்ளளவு, பருமம்

W

Whole number — முழு எண்

X

X-axis — *x* அச்சு

Y

Y-axis — *y* அச்சு

Z

Zero — பூச்சியம்

கணவியல்

கலைச் சொல்லகராதி

A

Aggregate	—	திரள்
Algebra	—	இயற் கணிதம்
,, of sets	—	கணவியல்

C

Class	—	இனம்
Complement, of a set	—	கண நிரப்பி
Complement, relative	—	பொருத்த நிரப்பி
Countable set	—	எண்ணிடக் கூடிய கணம்
Correspondence	—	

D

Diagrams, Venn	—	வென் படங்கள்
Domain	—	அரங்கம்

E

Element	—	உறுப்பு, மூலகம்
,, of a set	—	கண உறுப்பு
Enumerable	—	எண்ணிடக் கூடிய
,, set	—	எண்ணிடக் கூடிய கணம்
,, infinite set	—	எண்ணிடக் கூடிய முடிவற்ற கணம்

F

Function	—	சார்பு
Functional relation	—	சார்புடைத் தொடர்பு

I

Infinity	— கந்தழி
Intersection	— வெட்டு
A inperseetion *B* ($A \cap B$)	— *A* வெட்டு *B*

M

Map	— அமைப்பு மாற்று
Mapping	— அமைப்பு மாற்றம், உரு மாற்றம்
,, Set	— அமைப்புக் கணம்

N

Null Set ($\varnothing$)	— வெற்றுகணம், வெறுங்கணம்

O

Operation	— செய்கை
Operator	— செயலி

P

Power	— படி
,, of a set	— படிக்கணம்
Prime number	— பகா எண்

R

Range	— வீச்சு
Relation	—
,, Set	—

S

Set	— கணம்
,, Algebra	— கணவியல், கணவியற் கணிதம்
Disjoint sets	— பொதுவற்ற கணங்கள்
Set, finite	— கணக்கிலடங்கிய கணம்
,, infinite	— கணக்கிலடங்காத எண்ணிக்கையுள்ள கணம்

,, of points	—	புள்ளிக்கணம்
,, sub	—	உபகணம்
,, super	—	பெருங்கணம்
,, singleton	—	ஒற்றைக்கணம்
,, null (∅)	—	வெறுங்கணம், வெற்றுக் கணம் (∅)
,, Truth	—	உண்மையாக்கும் கணம்
Sets	—	கணங்கள்
,, difference between	—	கணவேறுபாடு
,, equal	—	சமமான கணங்கள்
,, equivalent	—	சமத்தன்மை பெற்ற

T

Term of a set	—	கணங்கள் கண உறுப்பு
Theory of Sets	—	கணவியற் கொள்கை
Truth set	—	உண்மையாக்கும் கணம்

U

Union	—	பிணைப்பு
,, of Sets	—	கணப் பிணைப்பு
$A \cup B$	—	A பிணைப்பு B

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், சென்னை.

1971 ஜூலை வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

			ரூ.	காசு
*1.	பொருளாதாரம்—I	சி. வேலாயுதம்	6	50
*1-A	,, II	,,	9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	,,	4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	சோணாசலம்	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	மு. ஆரோக்கியசாமி	6	00
6.	புதுமைப் பொருளர்தாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	12	00
7.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I	தி. சி. மோகன்	12	00
8.	,, II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10	75
*9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7	00
10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	சி. வேலாயுதம்	6	75
*11.	,, II	,,	11	50
*12.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	அர. சேஷாசலம்	4	75

*மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
*16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வணிகப் புரட்சி	கு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
34.	வரவு செலவு திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00

39.	வளர்ச்சியுறுத் நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4 25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5 50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7 50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7 75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7 00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6 25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4 50
*46.	,, II	,,	3 50
*47.	,, III	,,	7 25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I கி. பி. (395-1500)	டி. வி. சொக்கப்பா	3 75
*49.	,, II (கி. பி. 1500முதல்)	என். ஜே. இராஜகோபால்	5 50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு காலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15 00
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணாமலை	13 00
52.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13 00
53.	,, III	என். ஜே. இராஜகோபால்	8 00
54.	இங்கிலாந்து—IV	,,	8 00
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15 00
56.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8 00
57.	,, III	,,	5 00

*மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	5	50
59.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
60.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	7	25
61.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
62.	,, II	,,	7	00
63.	,, III	பி. இராமானுஜம் தேவதாஸ்	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
65.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்,	7	0
66.	,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப் எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
68.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
70.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	75
71.	,, III	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
72.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
74.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
75.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
77.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

*78.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
*79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50
*80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
84.	,, II	,,	13	25
85.	பொதுதுறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
86.	,, II	இ. ஜெகதீசன்	7	25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
88.	,, ,, —II	டி. செல்லப்பா	7	50
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
91.	,, ,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
92.	,, ,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	7	25
*93.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. இராஜகோபால்	7	75
95.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00

*மூலநூல் (Original Book)

அரசியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
97.	,, II	,, கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
98.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

99.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
100.	,, II	,,	7	00
101.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
103.	,, II	,,	9	00
104.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மனுவேல்	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர் ராஜ்	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*107.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25
*108.	உள நலவியல்	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	6	00

தத்துவம்

109.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*110.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். இராமானுஜாச்சாரி	3	50
*111.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3	50
112.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
113.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50
114.	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. ஆ. தேவசேனபதி, பா. நா. ஷண்முகசுந்தரம்	3	50

115.	இந்தியத் தத்துவம்—II	வ. ஆ. தேவசேனுதிபதி, ப. நா. சண்முகசுந்தரம்	6	00
116.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—	சி. இராமலிங்கம்	6	00

அறவியல்

117.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8	50

அளவையியல்

118.	அளவை இயல்—தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2	[illegible]

மானிடவியல்

*119.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4	75
120.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியன்	5	50
121.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3	50

சமூகவியல்

122.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜெ. நாராயணன்	10	50

புவியியல்

*123.	ஆசியா—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
*124.	,, II	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	8	75
*125.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	எ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*126.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50

*மூலநூல் (Original Book)

புவியியல்—(தொடர்ச்சி)

				ரூ.	காசு
*127.	வட அமெரிக்கா	...	குமாரி இரா. அலுமேலு ...	6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	...	எம். என். பத்மநாபன் ...	9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	...	திருமதி எச். நியூமன் ...	3	00
*130.	தென் கண்டங்கள்—ஆஃப்ரிக்கா	...	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்...	3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	...	நா. அனந்தபத்மநாபன் ...	6	00
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன் ...	5	50
*133.	மக்கட் பரப்பியல்	...	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன் ...	4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	...	கோ. இராமசாமி ...	6	50
135.	காலநிலை இயல்—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன் ...	10	00
136.	,, II	...	,, ...	5	00
*137.	காலநிலை இயல்—I	...	திருமதி இராதா ...	9	50
*138.	,, II	...	,, ...	8	00
139.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. இராமசாமி ...	5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	...	சி. விசுவநாதன் ...	4	75
1 41.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	...	கோ. இராமசுவாமி ...	6	00
142.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	...	எஸ். மாணிக்கம் ...	9	50
143.	,, II	...	ம. கார்த்திகேயன் ...	12	00
144.	,, III	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன் ...	5	75

புள்ளியியல்

*145.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	...	சு. வைத்தியநாதன் ...	10	75
146.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	...	கோ. சண்முகசுந்தரம் ...	10	00
147.	,, II	...	கே. ஆர். இராஜகோபாலன் ...	14	00
148.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	...	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன் ...	6	50

உயர் கணிதம்

*149.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	4 25
*150.	வகை நுண்கணிதம்	,,	3 00
*151.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	3 25

விலங்கியல்

*152.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	12 00

பௌதிகவியல்

*153.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10 00

விஞ்ஞானம்

*154.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6 00
*155.	ரேடியோ	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	4 75
*156.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4 50
*157.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணாமலை	3 50
*158.	தாவரம்-வாழ்வும் வரலாறும் I	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8 00
*159.	கரும்பு	,,	4 00
*160.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6 50

மருத்துவம்

*161.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2 50

*மூல நூல் (Original Book)

மருத்துவம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
162.	மகப்பேறும் மாதாநோயும்	டாக்டர் (குமாரி) ந. மணிமேகலை	8	25
*163.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
164.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
165.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ் ஆர். சேது	6	75
166.	II	,,	5	50
167.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25

பொறியியல்

168.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், கே. வேணுகோபால் ஆர். இராமசுவாமி	8	50

கூட்டுறவு

169.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50

சட்டம்

*170.	குற்றவியல் சட்டம்	மா. சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00

பொது நூல்கள்

171.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
172.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00

173.	சேமக்கை-நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியன்	2	50
*174.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*175.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கடகிருஷ்ண அய்யங்கார்	4	50
*176.	பள்ளி நிருவாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	எஸ். சந்தானம், எஸ். ஏ. துரைசிங்	6	25

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

*177.	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	00
*178.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*179.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடையபிள்ளை	2	50
*180.	,, II	,,	2	25
*181.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7	50
*182.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*183.	பௌதிகம்—ஓர் அறிமுகம்	எஸ். சம்பத்	7	00
*184.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. இராஜகோபாலன்	7	00
*185.	,, II	,,	3	00
*186.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	00
*187.	,, II	,,	4	50
*188.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	ஆர். மகாதேவன்	4	75
*189.	,, II	,,	3	25
*190.	வேதியியல்	பி.டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*191.	புகுமுக வேதியியல்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*192.	விலங்கியல்	எஸ். ஆப்ரகாம்	4	00
*193.	புகுமுக விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை	7	25
*194.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	4	00

*மூலநூல் (Original Book)

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி. எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்கவிலைப் பதிப்புகள்—கழிவு இல்லை)

பௌதிகம்			ரூ.	காசு
*195.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	ஆர். நாகராசன் ...	6	25
*196.	,, II ...	,, ...	5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. நாச்சிமுத்து ...	5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிணசாமி ...	4	50
*199.	II ...	,, ...	3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்—I ...	பி. தங்கராசன் ...	4	00
*201.	,, II ...	,, ...	3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம் ...	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம் ...	4	50
*203.	மின்னியல்-காந்தவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. ஏ. கருப்பண்ணன் ...	4	75
*204.	,, II ...	,, ...	4	50
*205.	,, III ...	,, ...	4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன் ...	7	75
*207.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி II) (முதல் புத்தகம்)...	கா. வே. சுப்பிரமணியன் ...	6	00
*2 8.	,, (பகுதி II) (இரண்டாம் புத்தகம்) ...	,, ...	4	50

*209.	பொது பௌதிகம்—சிறப்புப்பாடம் ...	கே. பி. கந்தசாமி, எம். தியாகசுந்தரம்	4	50
*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் ...	எம். ஏ. தங்கராஜ் ...	6	75
*211.	ஒலி நூல்—சிறப்புப் பாடம் ...	டி. முருகையன் ...	5	00

வேதியியல்

*212.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்— ...	டாக்டர் என். முத்துக்குமாரசுவாமி ...	2	00
*213.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்— சிறப்புப் பாடம்...	டி. இராமலிங்கம் ...	2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. சக்திவேலு ...	4	00
*215.	,, II ...	,, ...	3	50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப் பாடம் ...	சி. ஏ. பத்மநாபன் ...	6	50
*217.	கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	பி. டி. முனியப்பா ...	4	00
*218.	,, II ...	,, ...	4	25
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப்பாடம்...	ஆர். துளசிதாஸ் ...	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	ஓ. ஆர் சூரியநாராயணன் ...	4	50
*221.	,, II ...	,, ...	3	75
*222.	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்-சிறப்புப் பாடம்...	என். ஆறுமுகம் ...	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்—துணைப்பாடம் ...	பி. எல், இராமசாமி ...	5	00
*224.	,, —I ...	எம். ஆட்கொண்டான் ...	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்—பகுதி—I (இரண்டாம் புத்தகம்) ...	கி. கண்ணபிரான் ...	4	75
*226.	,, (மூன்றும் புத்தகம்)...	,, ...	3	25
*227.	,, II (முதல் புத்தகம்)...	,, ...	5	75
*228.	,, II (இரண்டாம் புத்தகம்) ...	,, ...	6	00

*மூல நூல் (Original Book)

கணிதம்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துச்சாமி	4	25
*230.	,, II	,,	3	25
*231.	தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப் பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	கே. சிவசுப்ரமணியன்	2	75
*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*238.	கணிதம்—துணைப் பாடம்—பகுதி-2	ஆர். அய்யாசாமி	5	75
*239.	வானியல்—சிறப்புப் பாடம்—(முதல் புத்தகம்)	தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி	5	50
*240.	,, —(இரண்டாம் புத்தகம்)	தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி	3	75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	7	00

புள்ளியியல்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
*242.	புள்ளியியல்—துணைப் பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல்

*243.	முதுகெலும்பற்றவை-1—சிறப்புப் பாடம்	... ஆர். முருகேசன்	... 6	00
*244.	,, 2—சிறப்புப் பாடம்	... திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	... 6	00
*245.	முதுகு நாணுள்ளவை-1—சிறப்புப் பாடம்	... திருமதி ராணி கந்தசாமி	... 5	00
*246.	,, 2—சிறப்புப் பாடம்	... ,,	... 9	75
*247.	முதுகுத் தண்டுள்ளவை-2—சிறப்புப் பாடம்	... திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	... 11	75
*248.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்-சிறப்புப்பாடம்	... எஸ். ஆப்ரகாம்	... 9	00
*249.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப் பாடம்	... என். இராமலிங்கம்	... 9	00
*250.	முதுகு நாள்ணுளவை—துணைப் பாடம்	... வி. சேது	... 6	00
*251.	செல்லியல்—சிறப்புப் பாடம்	... என். இராமலிங்கம்	... 5	50
*252.	மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	... பெ. மா. அண்ணுமலை	... 5	25
*253.	சூழ்நிலையியல்—உடற் செயலியல்— சிறப்புப் பாடம்—I	... டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	... 4	75
*254.	,, II	... ,,	... 6	50
*255.	பரிணமம்	... எஸ். ஆப்ரகாம்	... 6	25

தாவரவியல்

*256.	தாவர வெளி, உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப் பாடம்	... கே. இராஜசேகரன்	... 11	00
*257.	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	... கே. பாலச்சந்திரகணேசன்	... 9	25
*258.	தாவர உள்ளமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	... டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	... 7	25
*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப் பாடம்	... எஸ். சுந்தரம்	... 9	50
*260.	தாவரவியல்—துணைப் பாடம்	... பா. இராசாராம்	... 4	50

*மூல நூல் (Original Book)

தாவரவியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர்மருஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப்பாடம் ...	கே. பெரியசாமி ...	4	00
*262.	சூழ்நிலையியல், பரிணமம், மரபியல்—சிறப்புப்பாடம் ...	கே. ஆர் பாலச்சந்திரகணேசன் ...	8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னோஸ்பெர்மே—சிறப்புப் பாடம்...	கே. இராஜசேகரன் ...	10	25
*264.	தாலோஃபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்) சிறப்புப் பாடம்...	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம் ...	9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	ஆ. சம்பத்குமார் ...	10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. இராஜசேகரன் ...	6	00

*மூலநூல் (Original Book)